ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

SỐ TIẾT: 45 =3 TC

GIẢNG VIÊN: Thầy

Tài liệu tham khảo:

1) Toán học cao cấp (Tập 1): Đại số và hình học giải tích-Nguyễn Đình Trí và một số tác giả.
2) Bài tập toán học cao cấp: Nguyễn Đình Trí và một số tác giả khác
3) Bất kì tài liệu nào về môn Đại số tuyến tính đều được: thầy sẽ úp thêm tài liệu lên Team.

Chương 1. Ma trận – Định thức

Chương 2. Hệ phương trình TT

Chương 3. Không gian vectơ

Chương 4. Ánh xạ tuyến tính

Chương 5. Dạng toàn phương

Chương 1. MA TRẬN – ĐỊNH THỨC

Bài 1. MA TRẬN

1.1. Khái niệm ma trận

1.2. Các phép toán trên ma trận

1.3. Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

1.4. Ma trận bậc thang

1.5. Ma trận khả nghịch

1.1. Khái niệm ma trận

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{array}{l}\leftarrow \textbf{dòng 1}\\ \leftarrow \textbf{dòng 2}\\ \\ \leftarrow \textbf{dòng } \boldsymbol{m}\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \textbf{cột 1} & \textbf{cột 2} & \textbf{cột } \boldsymbol{n}\end{array}$$

Bài 1. MA TRẬN

- Ma trận A như trên được viết gọn là $A = (a_{ij})_{m\times n}$.
- Ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là ***ma trận không***.
- Tập hợp các ma trận cấp $m\times n$ trên $\mathbb{R}$ được ký hiệu là $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Bài 1. MA TRẬN

VD

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{array} \\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \end{array} \longrightarrow A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

Ma trận vuông cấp *n*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow (a_{ij})_n \in M_n(\mathbb{R})$$

Ma trận dòng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$$

Ma trận cột

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$$

Đường chéo chính của ma trận vuông

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Đường chéo phụ của ma trận vuông

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận chéo *(diagonal matrix)*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

$$A = \mathrm{diag}(a_{11} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{nn})$$

Ma trận đơn vị *(Identity matrix)*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

$$I = \mathrm{diag}(1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)$$

Ma trận tam giác trên

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận tam giác dưới

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận đối xứng

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Hai ma trận bằng nhau

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$.

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ a_{ij} = b_{ij} \end{cases} \quad (\forall i, j)}$$

VD

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ z & 2 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & u & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ u = 2 \\ t = 3 \end{cases}$$

1.2. Các phép toán trên ma trận

1.2.1. Phép cộng và trừ hai ma trận

$$\boxed{(a_{ij})_{m\times n} \pm (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n}}$$

VD 1

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Nhận xét

Phép cộng ma trận có tính chất giao hoán và tính chất kết hợp.

1.2.2. Phép nhân vô hướng

$$\boxed{\lambda(a_{ij})_{m\times n} = (\lambda a_{ij})_{m\times n} \quad (\lambda \in \mathbb{R})}$$

VD 2

$$-3\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Chú ý

- Phép nhân vô hướng có tính phân phối đối với phép cộng ma trận.
- Ma trận $-1.A = -A$ được gọi là *ma trận đối* của ma trận A.

VD 3. $5\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 2 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 20 & 0 \\ -10 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 & -16 \\ 4 & 16 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 6 \\ 16 & -16 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$$

VD 4. Cho $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

Tìm ma trận X thỏa $2X + 4I_2 = 2A - B$.

Giải. Ta có:

$$2X + 4I_2 = 2A - B \Leftrightarrow 2X = 2A - B - 4I_2$$

$$\Leftrightarrow X = A - \frac{1}{2}B - 2I_2$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

1.2.3. Phép nhân hai ma trận

VD 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (1.4 + 2.5 + 3.6) = (32)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1.3+2.6) & (1.4+2.7) & (1.5+2.8) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & 18 & 21 \end{pmatrix}$$

Bài 1. MA TRẬN

tích d1 với c1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1.2 + 2(-1)} & 1.0 + 2.0 \\ 0.2 + 0.(-1) & 0.0 + 0.0 \end{pmatrix}$$

tích d1 với c2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 + 2(-1) & \boxed{1.0 + 2.0} \\ 0.2 + 0.(-1) & 0.0 + 0.0 \end{pmatrix}$$

Bài 1. MA TRẬN

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2+2(-1) & 1.0+2.0 \\ \boxed{0.2+0.(-1)} & \boxed{0.0+0.0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bài 1. MA TRẬN

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$$

Chú ý

Điều kiện để phép nhân *AB* thực hiện được là số cột của ma trận *A* (ma trận trước) bằng số dòng của ma trận *B* (ma trận sau).

Nhận xét

- **Số dòng của ma trận *AB* bằng số dòng của *A***
- **Số cột của ma trận tích *AB* bằng số cột của *B*.**

Sơ đồ nhân hai ma trận

Phần tử dòng *i*, cột *k*

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{ik} \end{pmatrix}$$

VD 6. **Thực hiện phép nhân**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 7 & 5 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Nhận xét

- Tích của hai ma trận khác không có thể là một ma trận *không*.
- Phép nhân hai ma trận không có tính giao hoán.

- **Tính chất**

1) $(AB)C = A(BC);$

2) $A(B+C) = AB + AC;$

3) $(A+B)C = AC + BC;$

4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B);$

5) $AI_n = A = I_m A \ (A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})).$

VD 7. Thực hiện phép tính sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Giải. Thực hiện phép nhân từ phải sang trái ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -3 \\ -42 \end{pmatrix}$$

1.2.4. Lũy thừa ma trận vuông

- Lũy thừa của ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ là:

$$\boxed{A^0 = I_n,\ A^1 = A,\ A^{k+1} = A^k.A = A.A^k\ \ (\forall k \in \mathbb{N})}$$

- Nếu $A \neq (0_{ij})_n$ và $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ sao cho $A^k = (0_{ij})_n$ thì A được gọi là ma trận *lũy linh*.

- Số $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$ bé nhất sao cho $A^k = (0_{ij})_n$ được gọi là ***cấp*** của ma trận lũy linh A.

VD 8. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ là lũy linh cấp 3 vì:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq (0_{ij})_3; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0_{ij})_3.$$

▪ Tính chất

1) $[(0_{ij})_n]^k = (0_{ij})_n, \ (I_n)^k = I_n, \ \forall k \in \mathbb{N}.$

2) $A^{k+m} = A^k.A^m, \ \forall A \in M_n(\mathbb{R}), \ \forall k, m \in \mathbb{N}.$

3) $A^{km} = (A^k)^m, \ \forall A \in M_n(\mathbb{R}), \ \forall k, m \in \mathbb{N}.$

VD 11. Xét hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Do $AB = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = BA$ nên

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

1.2.5. Phép chuyển vị

$$(a_{ij})_{m\times n} \xrightarrow{\text{Chuyển dòng thành cột}} (a_{ji})_{n\times m}$$

$$\boxed{\left[(a_{ij})_{m\times n}\right]^T = (a_{ji})_{n\times m}}$$

Transposed matrix **của** $(a_{ij})_{m\times n}$

VD 18

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

▪ Tính chất

1) $(A+B)^T = A^T + B^T, \forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

2) $(\lambda A)^T = \lambda . A^T, \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

3) $(A^T)^T = A, \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

4) $(AB)^T = B^T A^T, \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$.

1.3. Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

1.3.1. Định nghĩa

1) Hoán vị dòng i và dòng k để A trở thành B

$$\boxed{A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_k} B}$$

2) Nhân dòng i với số $\lambda \neq 0$ để A trở thành C

$$\boxed{A \xrightarrow{d_i \to \lambda d_i} C}$$

3) Thay dòng i bởi tổng dòng i với λ lần dòng k để A thành D

$$\boxed{A \xrightarrow{d_i \to d_i + \lambda d_k} D}$$

- **Chú ý**

1) Trong dạng 3), số thực λ có thể là 0.

2) Trong thực hành ta thường làm gộp

$$A \xrightarrow{d_i \to \mu d_i + \lambda d_k} E$$

3) Tương tự, ta cũng có các phép biến đổi sơ cấp trên cột của ma trận.

VD 19. Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận sau đây về ma trận tam giác trên:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Giải. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \boxed{2} & 1 & -1 \\ \boxed{3} & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & \boxed{5} & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

VD 20. Dùng các phép biến đổi sơ cấp để đưa ma trận sau đây về ma trận đơn vị:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Giải. Ta có:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 \to c_3 + c_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3 \to d_3 - 2d_1]{d_2 \to d_1 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d_1 \to d_1 - \frac{1}{3}d_2 \\ d_2 \to \frac{1}{3}d_2}]{d_3 \to d_3 + d_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4. Ma trận bậc thang và bậc thang rút gọn

1.4.1. Ma trận bậc thang

▪ Định nghĩa

- Trong một ma trận, một dòng có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là *dòng bằng không* hay *dòng không*.
- Trong ma trận, phần tử khác 0 đầu tiên tính từ trái sang phải của một dòng được gọi là phần tử ***cơ sở*** của dòng đó.

▪ Định nghĩa

- Ma trận bậc thang là ma trận khác *không* có cấp $m \times n \ (m, n \geq 2)$ thỏa cả hai điều kiện sau

  1) Các dòng *bằng không* phải ở phía dưới các dòng khác không;

  2) Phần tử cơ sở của một dòng bất kỳ nằm *bên phải* phần tử cơ sở của dòng ở phía trên dòng đó.

VD Các ma trận sau là bậc thang:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Các ma trận sau không phải là bậc thang:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **Định lý**

Mọi ma trận đều có thể đưa được về ma trận bậc thang bằng một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp.

1.4.2. Ma trận bậc thang rút gọn

- **Định nghĩa**

Ma trận bậc thang rút gọn là ma trận ***bậc thang*** có phần tử cơ sở của một dòng bất kỳ **đều bằng 1** và là phần tử khác 0 ***duy nhất*** *của cột* chứa phần tử đó.

VD. $$I_n,\ A=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&0&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

1.5. Ma trận khả nghịch

1.5.1. Định nghĩa

- Ma trận vuông A cấp n được gọi là ***khả nghịch*** nếu tồn tại ***ma trận vuông cùng cấp*** B sao cho

$$\boxed{AB = BA = I_n}$$

- Ma trận B là duy nhất và được gọi là ma trận ***nghịch đảo*** của ma trận A, ký hiệu là $B = A^{-1}$.

- **Chú ý**

1) $(A^{-1})^{-1} = A;$

2) $B = A^{-1} \Leftrightarrow A = B^{-1}.$

VD 21. Tìm A^{-1}, biết $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ thỏa đẳng thức

$$A^3 - A^2 - A + I_3 = (0_{ij})_3.$$

Giải. Ta có:

$$A^3 - A^2 - A + I_3 = (0_{ij})_3 \Leftrightarrow -A^3 + A^2 + A = I_3$$

$$\Leftrightarrow A(-A^2 + A + I_3) = I_3.$$

Vậy $A^{-1} = -A^2 + A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

- ***Chú ý***

1) Nếu ma trận vuông A có ***ít nhất*** 1 dòng (hay 1 cột) bằng không thì ***không khả nghịch***.

2) $I^{-1} = I;\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3) Nếu $ac - bd \neq 0$ thì

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac - bd} \times \begin{pmatrix} c & -b \\ -d & a \end{pmatrix}}$$

VD 23. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Thực hiện các phép tính: 1) $(AB)^{-1}$; 2) $B^{-1}A^{-1}$.

Giải. 1) Ta có $AB = \begin{pmatrix} 19 & 12 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & 12 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{19.7 - 11.12} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -11 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -11 & 19 \end{pmatrix}.$$

2) Ta có:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -11 & 19 \end{pmatrix}.$$

1.5.2. Thuật toán tìm ma trận nghịch đảo bằng phép biến đổi sơ cấp trên dòng

- **Bước 1.** Lập ma trận $\left(A \middle| I_n\right)$.
- **Bước 2.** $\left(A \middle| I_n\right) \xrightarrow{\text{sơ cấp dòng}} \left(A' \middle| B\right)$

(với A' là ma trận bậc thang rút gọn).

1) nếu $A' \neq I_n$ thì ta kết luận A không khả nghịch;

2) nếu $A' = I_n$ thì $A^{-1} = B$.

VD 24. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Giải. Ta có:

$$A\big|I_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -5 & 1 & 0 \\ -2 & 10 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_2 \to d_2 + 2d_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Do $A' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$ nên A không khả nghịch.

VD 25. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Giải. Ta có:

$$B \big| I_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_2 \to d_2 - d_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_1 \to 2d_1 + d_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_2 \to \frac{1}{10} d_2]{d_1 \to \frac{1}{2} d_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{10} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

VD 26. Tìm nghịch đảo của $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$D\big|I_4 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_2 \to d_3 - d_2 \\ d_1 \to d_1 + d_2 - d_4}]{d_3 \to d_3 - d_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$D^{-1}$$

....

Chương 1. MA TRẬN – ĐỊNH THỨC

Bài 2. ĐỊNH THỨC

2.1. Ma trận con cấp *k*

2.2. Định nghĩa định thức

2.3. Các tính chất cơ bản của định thức

2.4. Định lý Laplace về khai triển định thức

2.5. Ứng dụng tìm ma trận nghịch đảo

2.6. Hạng của ma trận

2.1. Ma trận con cấp *k*

▪ Định nghĩa

- Ma trận vuông cấp k được lập từ các phần tử nằm trên giao của k dòng và k cột của $A=(a_{ij})_n \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là *ma trận con cấp k* của A.
- Ma trận M_{ij} có cấp $n-1$ thu được từ A bằng cách bỏ đi *dòng thứ i* và *cột thứ j* được gọi là

ma trận con của A ứng với phần tử a_{ij}.

VD. Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2} & 3 \\ 4 \quad 5 & 6 \\ \boxed{7 \quad 8} & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Ma trận A có tất cả bao nhiêu ma trận con?

2.2. Định nghĩa định thức

Định thức (*determinant*) của ma trận $A=(a_{ij})_n$, ký hiệu là $\det A$ hay $|A|$, là một số thực được định nghĩa quy nạp theo n như sau

- Nếu $n=1$ thì $\boxed{\det A = \left|a_{11}\right| = a_{11}}$
- Nếu $n=2$ thì $\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

- Nếu $n \geq 3$ thì

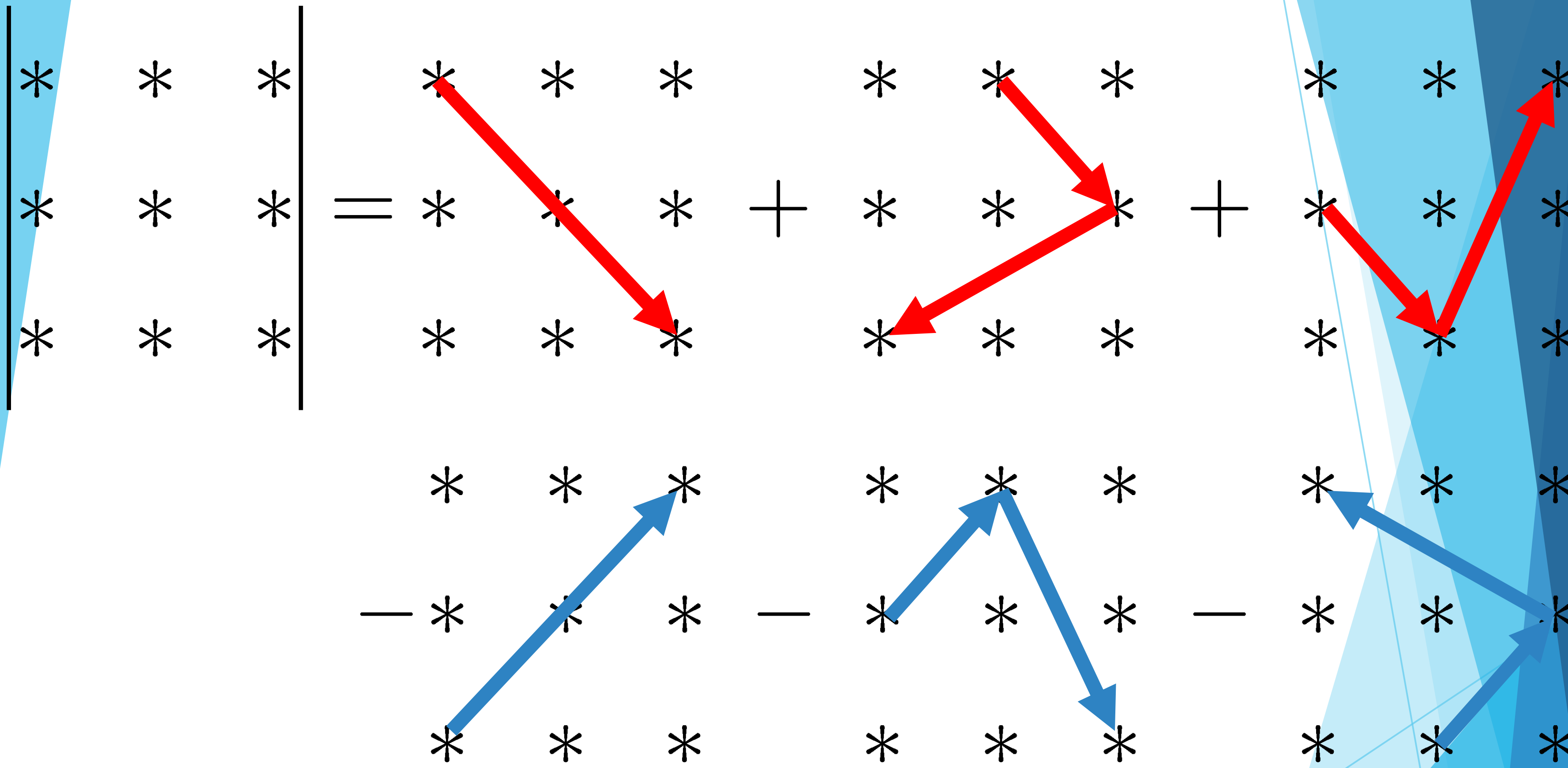
$$\boxed{\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}}$$

trong đó $A_{1j} = (-1)^{1+j}\det(M_{1j})$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

- **Chú ý**

1) $\det I_n = 1$, $\det(0_{ij})_n = 0$.

2) Quy tắc sáu đường chéo (*quy tắc Sarius*)



VD 1. Tính định thức của ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Giải

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3.4 - 1.(-2) = 14.$$

VD 2. Tính định thức của ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có: $\det B = 1.A_{11} + 2.A_{12} + (-1).A_{13}$

$$= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3 - 2.1 + (-1).7 = -12.$$

Cách khác. Sử dụng quy tắc sáu đường chéo, ta có:

$$\det B = 1.(-2).1 + 2.1.2 + 3.1.(-1)$$
$$-2.(-2)(-1) - 3.2.1 - 1.1.1 = -12.$$

VD 3. Tính định thức của ma trận $A = \begin{pmatrix} \boxed{0 & 0 & 3 & -1} \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$\det A = 0.A_{11} + 0.A_{12} + 3.A_{13} + (-1).A_{14}$$

$$= 3(-1)^{1+3}\det M_{13} - (-1)^{1+4}\det M_{14}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -49.$$

2.3. Các tính chất cơ bản của định thức

2.3.1. Tính chất 1

$$\boxed{\det(A^T) = \det A}$$

VD.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

2.3.2. Tính chất 2

Nếu hoán vị hai dòng (hay hai cột) cho nhau thì định thức đổi dấu.

VD. $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Hệ quả

Định thức có ít nhất hai dòng (hay hai cột) giống nhau thì bằng 0.

VD.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^5 \\ 1 & y^2 & y^5 \end{vmatrix} = 0.$$

2.3.3. Tính chất 3

Nếu nhân một dòng (hay một cột) với số thực λ thì định thức tăng lên λ lần.

VD.

$$\begin{vmatrix} 3.1 & 0 & 3.(-1) \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x^3 \\ x+1 & y & y^3 \\ x+1 & z & z^3 \end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix}.$$

Hệ quả

- ***Định thức có ít nhất 1 dòng (hay 1 cột) bằng không thì bằng 0.***
- ***Định thức có 2 dòng (hay 2 cột) tỉ lệ với nhau thì bằng 0.***

VD. $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ x^2 & 0 & y \\ x^3 & 0 & y^2 \end{vmatrix} = 0;$ $\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 2 \\ -8 \end{matrix}} & \begin{matrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -9 \\ -3 \\ 12 \end{matrix}} \end{vmatrix} = 0.$

2.3.4. Tính chất 4

Nếu định thức có một dòng (hay một cột) mà mỗi phần tử là tổng của hai số hạng thì ta có thể tách thành tổng hai định thức.

VD. $$\begin{vmatrix} x+1 & x-1 & x \\ x & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ x & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x \\ x & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix};$$

Bài 2. ĐỊNH THỨC

$$\begin{vmatrix} \cos^2 x & 2 & 3 \\ \sin^2 x & 5 & 6 \\ \sin^2 x & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin^2 x & 2 & 3 \\ \cos^2 x & 5 & 6 \\ \cos^2 x & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

2.3.5. Tính chất 5

Định thức sẽ không đổi nếu ta cộng vào một dòng (hay một cột) với λ lần dòng (hay cột) khác.

VD 4. Dùng tính chất 5, đưa định thức sau về dạng tam giác trên:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Giải

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{d_2 \to d_2 + d_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{d_3 \to d_3 - 2d_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{d_3 \to d_3 + \frac{1}{4} d_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

VD 5. Sử dụng các tính chất để tính định thức

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}.$$

Giải. $\Delta \overset{d_1 \to d_1 + d_2 + d_3}{=} \begin{vmatrix} x+4 & x+4 & x+4 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}$

$$= (x+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} \underset{d_3 \to d_3 - 2d_1}{\overset{d_2 \to d_2 - 2d_1}{=}} (x+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= (x+4)(x-2)^2.$$

Chú ý

Trong tính chất 5, dòng (hay cột) mà ta muốn thay đổi thì *không được nhân* với bất kỳ số thực nào khác 1.

VD. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{d_2 \to 2d_2 - d_1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10(!)$

2.4. Định lý Laplace về khai triển định thức

Cho ma trận $A = (a_{ij})_n$. Gọi $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ là phần bù đại số của phần tử a_{ij}.

- **Khai triển theo dòng thứ *i***

$$\boxed{\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}}$$

- **Khai triển theo cột thứ *j***

$$\boxed{\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}}$$

VD 6. Tính định thức $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ bằng hai cách:

1) khai triển theo dòng 1; 2) khai triển theo cột 2.

Giải. 1) Khai triển theo dòng 1, ta có:

$$\Delta = 1.A_{11} + 2.A_{14} = (-1)^2.M_{11} + 2(-1)^5.M_{14}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

2) Khai triển theo cột 2, ta có:

$$\Delta = (-1).3.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

VD 7. Áp dụng tính chất và khai triển Laplace, hãy tính định thức $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$\Delta \xlongequal[\substack{d_3 \to d_3 - d_1 \\ d_4 \to d_4 - 3d_1}]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{Khai triển cột 1}} \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -34.$$

▪ Các kết quả đặc biệt cần nhớ

- **Dạng ma trận chéo**

$$\boxed{\det\left[\operatorname{diag}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right] = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

- **Dạng ma trận chia khối**

Nếu A, C là hai ma trận vuông và O là ma trận không thì ta có

$$\boxed{\begin{vmatrix} A & \vdots & B \\ \cdots & & \cdots \\ O & \vdots & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \vdots & O \\ \cdots & & \cdots \\ B & \vdots & C \end{vmatrix} = \det A.\det C}$$

- **Dạng ma trận tích**

Nếu A và C là hai ma trận vuông cùng cấp thì ta có

$$\boxed{\det(AB) = \det A.\det B}$$

VD 8. Tính định thức $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$

Giải. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (-8).(-3) = 24.$

VD 9. Tính định thức $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$

Giải. Hoán vị cột và dòng như sau:

$$\Delta \overset{c_2 \leftrightarrow c_4}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{d_1 \leftrightarrow d_5}{=} \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{matrix}} \end{vmatrix}$$

Vậy $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-14).10 = -140.$

VD 10. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Tính $\det(AB)$.

Giải. Ta có:

$$\det(AB) = \det A.\det B = (-1).3 = -3.$$

VD 11. Tính định thức

$$\Delta = \left| \left(\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix} \right)^T \right|.$$

Giải. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -21.$

VD 12. Giải phương trình $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & x-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & x & 0 & 3 \\ 3 & 24 & x & x & 4 \\ x & x & x & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

Giải. Hoán vị cột 1 và cột 5, ta được:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 15 & x & 0 & 0 \\ 4 & 24 & x & x & 3 \\ 3 & x & x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Giải. Hoán vị cột 1 và cột 5, ta được:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 15 & x & 0 & 0 \\ 4 & 24 & x & x & 3 \\ 3 & x & x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 3 & 15 & x \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)(x^2-3)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=1 \vee x=\pm\sqrt{3}.$$

2.5. Ứng dụng định thức tìm ma trận nghịch đảo

2.5.1. Điều kiện để ma trận vuông khả nghịch

- **Định lý**

Ma trận vuông A là khả nghịch khi và chỉ khi

$$\boxed{\det A \neq 0}$$

VD 13. Tìm điều kiện của tham số m để ma trận sau khả nghịch:

$$A=\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 1 & m^2 \end{pmatrix}.$$

Giải. Ta có:

$$\det A=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} m & 0 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} m-1 & 0 \\ 1 & m^2 \end{vmatrix}=m^5(m-1)^2.$$

Vậy A khả nghịch $\Leftrightarrow \det A\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 1. \end{cases}$

2.5.2. Thuật toán tìm ma trận nghịch đảo

- **Bước 1.** Tính $\det A$. Khi đó:

1) nếu $\det A = 0$ thì ta kết luận A không khả nghịch;

2) nếu $\det A \neq 0$, ta làm tiếp bước 2.

- **Bước 2.** Tính ma trận *phụ hợp* (*adjunct matrix*)

$$\operatorname{adj} A = \left[(A_{ij})_n \right]^T, \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

- **Bước 3.** $$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}.\operatorname{adj} A}$$

VD 14. Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, ta có $\det A = 0$.

Vậy A không khả nghịch.

VD 15. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm A^{-1}.

Giải

- Ta có $\det A = -7 \neq 0$, suy ra A khả nghịch.
- Các ma trận phụ hợp là:

$$A_{11} = 4,\ A_{12} = 3,\ A_{21} = 5,\ A_{22} = 2$$

$$\Rightarrow (A_{ij})_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{adj} A = \left[(A_{ij})_2\right]^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vậy $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}.\operatorname{adj} A = -\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$

VD 16. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm A^{-1}.

Giải. Ta có $\det A = 2 \neq 0 \Rightarrow A$ khả nghịch.

Các ma trận phụ hợp là:

$$A_{11} = 1,\ A_{12} = 1,\ A_{13} = -1,$$
$$A_{21} = -4,\ A_{22} = 2,\ A_{23} = 0,$$
$$A_{31} = 1,\ A_{32} = -1,\ A_{33} = 1$$

$$\Rightarrow (A_{ij})_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}.\operatorname{adj} A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2.6. Hạng của ma trận

2.6.1. Định thức con cấp *k*

- **Định nghĩa**

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Định thức của ma trận con cấp k của A được gọi là *định thức con cấp k* của A.

- **Định lý**

Nếu ma trận có tất cả các định thức con cấp k đều bằng 0 thì các định thức con cấp cao hơn k cũng bằng 0.

2.6.2. Hạng của ma trận

- **Định nghĩa**

Cấp cao nhất của định thức con khác 0 của ma trận *A* được gọi là *hạng của ma trận A*, ký hiệu là *r*(*A*).

Nếu *A* là *ma trận không* thì ta quy ước *r*(*A*) = 0.

VD 17. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ có tất cả 12 định thức con cấp một, $C_3^2.C_4^2 = 18$ định thức con cấp hai và $C_4^3 = 4$ định thức con cấp ba.

Các định thức con cấp ba đều bằng 0.

▪ Nhận xét

- Hạng của ma trận không thay đổi khi ta hoán vị dòng hay cột.
- Nếu $A=(a_{ij})_{m\times n}$ khác không thì

$$1\le r(A)\le \min\{m,n\}.$$

- Đặc biệt, nếu A là ma vuông cấp n thì

$$\boxed{r(A)=n\Leftrightarrow \det A\neq 0}$$

Ví dụ 18: Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix}$$

Tìm m để hạng của A bằng 3?

Giải: Ta có

$$\det A = -2m^2 + 3m + 8$$

$$r(A) = 3 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

2.6.3. Thuật toán tìm hạng của ma trận

- **Bước 1.**

  Đưa ma trận cần tìm hạng về dạng bậc thang.

- **Bước 2.**

  Số dòng khác không **của ma trận bậc thang** ***chính là hạng*** **của ma trận đã cho.**

VD 19. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ 3 & -8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Tìm $r(A)$.

Giải. Biến đổi sơ cấp dòng trên ma trận A, ta được:

$$A \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy $r(A) = 2.$

VD 20. Tìm $r(B)$, với $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Giải. Biến đổi sơ cấp trên ma trận B, ta được:

$$B \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Vậy $r(B) = 4$.

- ***Chú ý***

Trong trường hợp tham số ở các cột đầu, ta khó đưa ma trận về dạng bậc thang. Khi đó, ta hoán vị cột của ma trận sao cho *tham số ở các cột cuối*, rồi đưa về dạng bậc thang.

VD 21. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} m+1 \\ 2 \\ 2m \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ m+2 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix}$.

Tìm giá trị của tham số m để $r(A) = 2$.

Giải. Biến đổi sơ cấp trên ma trận A, ta được:

$$A \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 3 & 1 & m+1 \\ 0 & m+2 & 2 \\ 3 & 1 & 2m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & m+1 \\ 0 & \boxed{m+2} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{m-1} \end{pmatrix}$$

- Với $m = 1$, ta có:

$$A \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$$

- Với $m=-2$, ta có:

$$A \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$$

Vậy $m=-2 \vee m=1.$

VD 22. Tùy theo giá trị của m, tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Giải. Biến đổi sơ cấp trên ma trận A, ta được:

$$A \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_4]{c_1 \leftrightarrow c_5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & 0 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3 \to d_3 - d_1 \\ d_4 \to d_4 - d_1}]{d_2 \to d_2 + d_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & m-1 \\ 0 & 2 & -1 & m-2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4 \to d_4 - d_3]{d_3 \to d_3 + d_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & m-1 \\ 0 & 0 & 1 & m-1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-m+1} & -m+1 \end{pmatrix}$$

Vậy $m = 1 \Rightarrow r(A) = 3$, $m \neq 1 \Rightarrow r(A) = 4$.