Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính

Bài 1. Hệ phương trình tổng quát

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính

Bài 1. Hệ phương trình tổng quát

1.1. Định nghĩa

1.2. Hệ Cramer

1.3. Giải hệ tổng quát bằng phương pháp Gauss

1.4. Điều kiện có nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tổng quát

1.1. Định nghĩa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (I)$$

$$a_{ij},\ b_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

Ma trận hệ số

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

Ma trận cột của hệ số tự do

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = (b_i)_{m\times 1} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$$

Ma trận cột của ẩn

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_j)_{n\times 1} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

Hệ phương trình (*I*) được viết dưới dạng ma trận là

$$\boxed{AX = B}$$

- $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ được gọi là một nghiệm của hệ (I) nếu

$$\boxed{A\alpha = B}$$

- ***Quy ước***

Để cho gọn, ta viết nghiệm dưới dạng

$$\alpha = (\alpha_1;\ \alpha_2;\ldots;\ \alpha_n).$$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

VD. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$$

Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

và $\alpha = (1; -1; -1; 1)$ là một nghiệm của hệ.

1.2. Hệ Cramer

1.2.1. Định nghĩa

Hệ Cramer là một hệ phương trình tuyến tính có *số phương trình bằng với số ẩn* và định thức của ma trận hệ số khác 0.

VD. Hệ $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x - 3y + 6z = 4 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases}$ là hệ Cramer.

Hệ $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ x + 4y - z = 2 \end{cases}$ không phải là hệ Cramer.

1.2.2. Định lý Cramer (*Quy tắc Cramer*)

Cho hệ Cramer $AX = B$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ và $\det A \neq 0$.

Hệ Cramer $AX = B$ có nghiệm duy nhất là

$$\boxed{x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)}$$

trong đó, các ma trận A_j nhận được bằng cách thay cột thứ j của ma trận A bởi cột các hệ số tự do B.

VD 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

Giải. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 4.$$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_1 = -12$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_2 = 24$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_3 = -4$$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} = -3 \\ x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} = 6 \\ x_3 = \dfrac{\det A_3}{\det A} = -1 \end{cases}$$

VD 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x - 3y + 6z = 4 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases}$

Giải. Ta có:

$\det A = 75$, $\det A_1 = 75$, $\det A_2 = 75$, $\det A_3 = 75$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x;\ y;\ z) = (1;\ 1;\ 1)$.

1.2.3. Biện luận số nghiệm của hệ dạng Cramer

Cho hệ $AX = B$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ và A chứa tham số m.

- **TH 1.** Nếu $\det A \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất.
- **TH 2.** Nếu $\det A = 0$ và $\exists j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho $\det A_j \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.
- **TH 3.** Nếu $\det A = \det A_j = 0$ $(\forall j = 1, 2, \ldots, n)$ thì hệ có thể có *vô số nghiệm hoặc vô nghiệm*.

  Khi đó, ta giải $\det A = 0$ tìm tham số m và thay vào hệ để giải trực tiếp.

VD 3. Tìm điều kiện của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} mx + 8z - 7t = m - 1 \\ 3x + my + 2z + 4t = m \\ mz + 5t = m^2 - 1 \\ 5z - mt = 2m + 2 \end{cases}$$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Giải. Ta có:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} m & 0 & 8 & -7 \\ 3 & m & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & m & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -m \end{array}\right) \Rightarrow \det A = -m^2(m^2+25).$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi $\det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$

VD 4. Tìm điều kiện của tham số m để hệ
$$\begin{cases}(m+1)x + \qquad\qquad y = m+2\\ \qquad\quad x + (m+1)y = 0\end{cases}$$ có nghiệm.

Giải. Ta có $\det A = m(m+2)$.

Suy ra $\det A = 0 \Leftrightarrow m = -2 \vee m = 0$.

- Với $m = -2$, hệ phương trình trở thành

$x - y = 0$ (vô số nghiệm).

- Với $m = 0$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases} \text{(vô nghiệm).}$$

Vậy hệ có nghiệm khi $m \neq 0$.

VD 5. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Giải. Ta có $\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2)(m-1)^2$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

$$\Rightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow m = -2 \vee m = 1.$$

- Với $m \neq -2 \wedge m \neq 1$, ta có $\det A \neq 0$.
  Suy ra hệ có nghiệm duy nhất.
- $m = 1$, hệ trở thành $x + y + z = 1$ (vô số nghiệm).
- $m = -2$, hệ trở thành:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$$ (vô nghiệm).

VD 6. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} (m-7)x + 12y - 6z = m \\ 10x - (m+19)y + 10z = -2m \\ 12x - 24y - (m-13)z = 0 \end{cases}$$

Giải. Ta có: $\det A = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & -6 \\ 10 & -m-19 & 10 \\ 12 & -24 & 13-m \end{vmatrix}$

$$= (m-1)(m^2-1).$$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Suy ra $\det A = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1.$

- $m \neq \pm 1$, ta có $\det A \neq 0$ (nghiệm duy nhất).
- $m = \pm 1$, hệ phương trình vô nghiệm.

Chú ý

khi $m = 1$ thì $\det A = \det A_1 = \det A_2 = \det A_3 = 0$ nhưng hệ phương trình vẫn vô nghiệm.

1.3. Giải hệ tổng quát bằng phương pháp Gauss

Xét hệ $AX = B\ (I)$ với ma trận mở rộng như sau

$$\bar{A} = A\big|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \boxed{b_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Để giải hệ (I) ta thực hiện các bước sau

- **Bước 1.** Lập ma trận mở rộng $\overline{A}$.
- **Bước 2.** Đưa $\overline{A}$ về bậc thang bởi các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.
- **Bước 3.** Viết lại hệ và giải ngược từ dưới lên trên.

▪ *Chú ý*

Trong quá trình thực hiện bước 2, nếu:

i) có hai dòng tỉ lệ thì ta xóa đi một dòng;

ii) có dòng nào bằng *không* thì ta xóa đi dòng đó;

iii) có ít nhất một dòng ở dạng $(0 \quad \cdots \quad 0 \,|\, b)$ $(b \neq 0)$

thì ta kết luận hệ (I) vô nghiệm.

VD 7. Giải hệ sau bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} 2x + y - \ z = \ 1 \\ \qquad y + 3z = \ 3 \\ 2x + y + \ z = -1 \end{cases}$$

Giải. Ta có $\bar{A} = \left(A \middle| B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$.

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y + 3z = 3 \\ 2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \\ z = -1 \end{cases}$$

VD 8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Giải

$$\bar{A} = A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 5 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

$$\bar{A} \xrightarrow[d_3 \to 5d_3 - 2d_1]{d_2 \to 5d_2 - 4d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 39 & -15 & 6 & -11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - 3d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

VD 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y - 3z + 5t = 1 \\ x + 3y - z + t = -2 \\ 2x + 5y - 4z + 6t = -1 \end{cases}$

Giải. Ta có $\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -4 & 6 & -1 \end{array}\right)$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} x + 2y - 3z + 5t = 1 \\ \qquad\quad y + 2z - 4t = -3. \end{cases}$

Ta chọn x, y làm ẩn chính và z, t làm ẩn phụ.

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Đặt $z = \alpha \in \mathbb{R}$, $t = \beta \in \mathbb{R}$ và thế vào hệ ta được

$$\begin{cases} x = 7 + 7\alpha - 13\beta \\ y = -3 - 2\alpha + 4\beta. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x = 7 + 7\alpha - 13\beta \\ y = -3 - 2\alpha + 4\beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases} (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}).$$

VD 10. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 = -4 \\ 2x_1 + 12x_2 + 6x_3 - 18x_4 - 5x_5 = -5 \\ 3x_1 + 18x_2 + 8x_3 - 23x_4 - 6x_5 = -2 \end{cases}$$

Giải. Ta có $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 2 & 12 & 6 & -18 & -5 & -5 \\ 3 & 18 & 8 & -23 & -6 & -2 \end{array}\right)$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 = -4 \\ 2x_3 - 8x_4 - x_5 = 3 \\ x_5 = 7 \end{cases}$$

Đặt $x_2 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_4 = \beta \in \mathbb{R}$ và thế vào hệ ta được

$$\begin{cases} x_1 = -6\alpha - 3\beta \\ x_3 = 5 + 4\beta \\ x_5 = 7 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm

$$(-6\alpha - 3\beta;\ \alpha;\ 5 + 4\beta;\ \beta;\ 7)\ (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}).$$

- ***Chú ý***

Trong trường hợp hệ có vô số nghiệm, ta gọi nghiệm chứa tham số là ***nghiệm tổng quát***.

Cho tham số giá trị cụ thể, ta được ***nghiệm riêng***.

VD. Nghiệm tổng quát trong VD 10 là

$$(-6\alpha - 3\beta;\ \alpha;\ 5 + 4\beta;\ \beta;\ 7)\ (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}).$$

Cho $\alpha = 1,\ \beta = 0$ ta được một nghiệm riêng là

$$(-6;\ 1;\ 5;\ 0;\ 7).$$

1.4. Điều kiện có nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tổng quát

1.4.1. Định lý Kronecker – Capelli

Hệ phương trình tuyến tính tổng quát $AX = B\ (I)$ *có nghiệm khi và chỉ khi*

$$\boxed{r(A) = r(\bar{A})}$$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

- ***Chú ý***

i) $r(A) \le r(\bar{A})$.

ii) Nếu $r(A) = r(\bar{A}) = n$ (bằng số ẩn) thì hệ (I) có *nghiệm duy nhất*.

iii) Nếu $r(A) = r(\bar{A}) < n$ thì hệ (I) có *vô số nghiệm*, trong đó có $n - r$ ẩn tự do được lấy tùy ý.

VD 11. Tìm điều kiện của m để hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = 5 \\ 3x + 7y + m^2 z = 6 \end{cases}$$ có vô số nghiệm.

Giải. Ta có $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & m^2 & 6 \end{array}\right)$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & m^2-3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{m^2-4} & 0 \end{array}\right).$$

Suy ra hệ có vô số nghiệm khi:

$$r(A) = r(\bar{A}) = 2 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

VD 12. Tìm điều kiện của m để hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 3y + z = -1 \\ -2x - 6y + (m-1)z = 4 \\ 4x + 12y + (3+m^2)z = m-3 \end{cases}$$ vô nghiệm.

Giải. Ta có $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & -6 & m-1 & 4 \\ 4 & 12 & m^2+3 & m-3 \end{array}\right)$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m+1 & 2 \\ 0 & 0 & m^2-1 & m+1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{m+1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3-m} \end{array}\right).$$

- $m = 3 \Rightarrow r(A) = r(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm.
- $m = -1 \Rightarrow r(A) = 1 < 3 = r(\bar{A}) \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho vô nghiệm khi $m \neq 3$.

- ***Chú ý***

i) Khi tìm điều kiện của tham số để ***hệ phương trình vô nghiệm***, ta có thể tìm điều kiện để ***hệ có nghiệm***. Sau đó, ta ***kết luận ngược lại***.

ii) Nếu ma trận mở rộng $\overline{A}$ có ***các cột đầu chứa tham số*** thì ta có thể ***đổi cột*** trong ma trận A (***không được đổi với cột hệ số tự do***).

VD 13. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + y + z + t = m \\ 2x + 3y + 2z + (5m-3)t = m+1 \\ (m-1)x + 3y + 2z + (m^2+m)t = 4 \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} m & 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 3 & 2 & 5m-3 & m+1 \\ m-1 & 3 & 2 & m^2+m & 4 \end{array}\right)$$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

$$\xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & m \\ 2 & 3 & 2 & 5m-3 & m+1 \\ 2 & 3 & m-1 & m^2+m & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_2 \to d_2 - 2d_1]{d_3 \to d_3 - d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & m \\ 0 & 1 & 2-2m & 5m-5 & 1-m \\ 0 & 0 & m-3 & m^2-4m+3 & 3-m \end{array}\right).$$

- Nếu $m = 3$ thì $r(A) = r(\bar{A}) = 2$

  $\Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm.

- Nếu $m \neq 3$ thì $r(A) = r(\bar{A}) = 3$

  $\Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm.

Vậy hệ có vô số nghiệm với mọi *m*.

1.4.2. Điều kiện để hai hệ phương trình có nghiệm chung

Muốn tìm điều kiện của tham số để hai hệ phương trình có nghiệm chung, ta ghép chúng thành một hệ rồi đi tìm điều kiện của tham số để hệ chung đó có nghiệm.

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2m+1 \\ 0 & 6 & -4 & -2 & -3m-1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10m-2 \end{array}\right).$$

Suy ra $r(A) = r(\bar{A}) \Leftrightarrow -10m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{5}$.

Vậy hai hệ đã cho có nghiệm chung khi $m = -\dfrac{1}{5}$.

Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

2.1. Định nghĩa

2.2. Nghiệm cơ bản của hệ phương trình thuần nhất

2.3. Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

2.1. Định nghĩa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (II)$$

Đặt $O = (0_i)_{m\times 1}$, hệ (II) trở thành

$$\boxed{AX = O}$$

- ***Chú ý***

i) Do $r(A) = r(\bar{A})$ nên hệ (II) luôn có nghiệm.

ii) Đặc biệt, hệ (II) luôn có nghiệm $X_0 = (0;\ 0; \ldots;\ 0)$.

Khi đó, X_0 được gọi là *nghiệm tầm thường* của (II).

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Nhận xét

- Khi $m = n$ và $\det A \neq 0$ thì (II) có **duy nhất** ***nghiệm tầm thường***.
- Khi $m = n$ và $\det A = 0$ thì (II) có ***vô số nghiệm***.
- Khi $m < n$ thì (II) có ***vô số nghiệm***.

Chú ý

Khi $m > n$, để biện luận số nghiệm của (II) ta dùng định lý Kronecker – Capelli.

VD 1. Tìm điều kiện tham số m để hệ phương trình sau có duy nhất nghiệm tầm thường

$$\begin{cases} 3x + m^2 y + (m-5)z = 0 \\ (m+2)y + z = 0 \\ 4y + (m+2)z = 0 \end{cases}.$$

Giải. Hệ có duy nhất nghiệm tầm thường khi:

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & m^2 & m-5 \\ 0 & m+2 & 1 \\ 0 & 4 & m+2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 3(m^2+4m) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -4. \end{cases}$$

VD 2. Tìm tham số m để hệ sau có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x + \quad y + (1-m)z = 0 \\ (m+1)x - \quad y + \qquad 2z = 0 \\ 2x - my + \qquad 3z = 0 \end{cases}$$

Giải. Hệ đã cho có vô số nghiệm khi:

$$\det A = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ m+1 & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1-m \\ m+2 & -1 & 2 \\ m+2 & -m & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1-m \\ 0 & m-1 & -1 \\ 1 & -m & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2)(m^2-2m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm 2. \end{array}\right.$$

2.2. Nghiệm cơ bản của hệ phương trình thuần nhất

VD 3. Xét hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \quad (*).$$

Ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ $(*)$ trở thành $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

Vậy hệ $(*)$ có vô số nghiệm dưới dạng

$$\begin{cases} x_1 = -2\alpha_1 - 5\alpha_2 \\ x_2 = 3\alpha_2 \\ x_3 = \alpha_1 \\ x_4 = \alpha_2 \end{cases} \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}).$$

Khi đó, ta có các khái niệm sau

1) $X = (-2\alpha_1 - 5\alpha_2;\ 3\alpha_2;\ \alpha_1;\ \alpha_2)$ $(\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R})$

được gọi là ***nghiệm tổng quát*** của hệ $(*)$.

2) Biến đổi nghiệm tổng quát, ta được

$X = \alpha_1(-2;\ 0;\ 1;\ 0) + \alpha_2(-5;\ 3;\ 0;\ 1)$ $(\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R})$

Nghiệm $X_1 = (-2;\ 0;\ 1;\ 0)$ và $X_2 = (-5;\ 3;\ 0;\ 1)$

được gọi là ***nghiệm cơ bản*** của hệ $(*)$.

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

3) Hệ nghiệm $\{X_1, X_2\}$ được gọi là

hệ nghiệm cơ bản của $(*)$.

▪ Tổng quát

Khi $r(A) = r < n$ (số ẩn) thì hệ (II) có vô số nghiệm phụ thuộc vào $n - r$ tham số $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_{n-r}$.

Ứng với $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_{n-r}$ ta có $n - r$ nghiệm cơ bản

$$X_1,\ X_2, \ldots,\ X_{n-r}.$$

Hệ nghiệm $\{X_1,\ X_2, \ldots,\ X_{n-r}\}$ được gọi là

hệ nghiệm cơ bản của (II).

Khi đó, ta có nghiệm tổng quát

$$\boxed{X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_{n-r} X_{n-r}}$$

- **Chú ý**

Nghiệm tầm thường không phải là nghiệm cơ bản.

VD 4. Tìm nghiệm cơ bản và nghiệm tổng quát của hệ

$$\begin{cases} x + y + \ z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - 4z = 0. \end{cases}$

Cho $z = 1$, ta được một nghiệm cơ bản là

$$X_1 = \left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; 1\right).$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là:

$$X = \alpha X_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\alpha \\ y = -\dfrac{4}{3}\alpha \\ z = \alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}).$$

- ***Chú ý***

Để tránh các nghiệm cơ bản ở dạng phân số, ta có thể chọn ẩn phụ và tham số thích hợp khi tìm nghiệm cơ bản.

VD 5. Tìm nghiệm cơ bản và nghiệm tổng quát của hệ

$$\begin{cases} x + y + \ z + 2t = 0 \\ 2x - y - 2z + \ t = 0 \end{cases}$$

Giải. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + y + \ z + 2t = 0 \\ -3y - 4z - 3t = 0 \end{cases}$$

Lần lượt thay $z = 3,\ t = 0$ và $z = 0,\ t = 1$ vào hệ ta được hai nghiệm cơ bản là:

$$X_1 = (1; -4;\ 3;\ 0) \text{ và } X_2 = (-1; -1;\ 0;\ 1).$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là:

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 - \alpha_2 \\ y = -4\alpha_1 - \alpha_2 \\ z = 3\alpha_1 \\ t = \alpha_2 \end{cases} (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}).$$

2.3. Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Xét hệ ***tuyến tính tổng quát*** và ***tuyến tính thuần nhất*** đều có vô số nghiệm như sau

$$AX = B \ (I) \text{ và } AX = O \ (II)$$

trong đó

$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ X = (x_j)_{n\times 1},\ B = (b_i)_{m\times 1},\ O = (0_i)_{m\times 1}$$

$$\text{và } r(A) = r(\bar{A}) < n.$$

- **Định lý**

Nếu ***X*** *là* ***nghiệm tổng quát*** *của hệ* *(II)* *và* $\boldsymbol{X_0}$ *là* ***một nghiệm riêng*** *của hệ* *(I)* *thì* $\boldsymbol{X + X_0}$ *là* ***nghiệm tổng quát*** *của hệ* *(I)*.

VD 6. Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z - 2t = 3 \\ x - y - z + \ t = 1 \end{cases} \quad (*)$$

Giải. Xét hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} x + y + z - 2t = 0 \\ x - y - z + \ t = 0 \end{cases} \quad (**).$$

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ $(**)$ có hai nghiệm riêng

$$X_1 = (0;\ 1; -1;\ 0),\ X_2 = (1;\ 1;\ 2;\ 2)$$

và nghiệm tổng quát là $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2.$

Mặt khác, hệ $(*)$ có một nghiệm riêng là

$$X_0 = (0;\ 0; -5; -4).$$

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Vậy nghiệm tổng quát của hệ $(*)$ là

$$\begin{cases} x = \alpha_2 \\ y = \alpha_1 + \alpha_2 \\ z = -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 5 \\ t = 2\alpha_2 - 4 \end{cases} (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}).$$

....