Chương 3. Không gian vector

Bài 1. Khái niệm không gian vector

Bài 2. Sự độc lập tuyến tính
- phụ thuộc tuyến tính

Bài 3. Số chiều và cơ sở của KGVT

Bài 4. Tọa độ của vector

Chương 3. Không gian vector

Bài 1. Khái niệm không gian vector

1.1. Định nghĩa

1.2. Tính chất của không gian vector

1.3. Các ví dụ về không gian vector

1.4. Không gian vector con

1.1. Định nghĩa

Cho tập V khác rỗng, xét hai phép toán cộng và nhân vô hướng sau:

$$V \times V \to V \qquad\qquad \mathbb{R} \times V \to V$$
$$(x, y) \mapsto x + y; \qquad\qquad (\lambda, x) \mapsto \lambda x.$$

Ta nói V cùng với hai phép toán trên là một ***không gian vector*** (***vector space***) trên $\mathbb{R}$ nếu thỏa 8 tính chất:

Bài 1. Khái niệm không gian vector

1) $(x+y)+z = x+(y+z),\ \forall x,y,z \in V;$

2) $\exists \theta \in V : x+\theta = \theta + x = x,\ \forall x \in V;$

3) $\forall x \in V,\ \exists (-x) \in V : (-x)+x = x+(-x) = \theta;$

4) $x+y = y+x,\ \forall x,y \in V;$

5) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y,\ \forall x,y \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R};$

6) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x,\ \forall x \in V,\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R};$

7) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x),\ \forall x \in V,\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R};$

8) $1.x = x,\ \forall x \in V.$

- ***Chú ý***

i) Mỗi phần tử thuộc V được gọi là một ***vector***; mỗi phần tử thuộc $\mathbb{R}$ được gọi là một ***vô hướng***.

ii) $\theta \in V$ là duy nhất và được gọi là ***vector không***.

iii) $(-x) \in V$ được gọi là ***vector đối*** của vector $x \in V$ và mỗi vector x có một vector đối duy nhất.

1.2. Tính chất của không gian vector *V*

1) $0.x = \theta, \ \forall x \in V$

2) $-x = (-1).x, \ \forall x \in V$

3) $\lambda.\theta = \theta, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

4) $\lambda.x = \theta \Rightarrow \lambda = 0 \vee x = \theta \ (x \in V, \ \lambda \in \mathbb{R})$

5) $\lambda.x = \mu.x, \ x \neq \theta \Rightarrow \lambda = \mu \ (x \in V; \lambda, \mu \in \mathbb{R})$

6) $\lambda.x = \lambda.y, \ \lambda \neq 0 \Rightarrow x = y \ (x, y \in V; \lambda \in \mathbb{R})$

1.3. Các ví dụ về không gian vector

1) Tập hợp các bộ số thực

$$\mathbb{R}^n = \ x = (x_1;\ x_2; \dots;\ x_n) \Big|\, x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n$$

là một không gian vector với hai phép toán:

$$x + y = (x_1 + y_1;\ x_2 + y_2; \dots;\ x_n + y_n),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1;\ \lambda x_2; \dots;\ \lambda x_n)\ (x, y \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}).$$

x_i được gọi là thành phần thứ i của vector

$$x = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Vector ***không*** thuộc $\mathbb{R}^n$ là $\theta = (0;\ 0; \dots;\ 0)$.

2) Gọi $P_n[x]$ là tập hợp các đa thức hệ số thực theo biến x có bậc nhỏ hơn hay bằng n.

Mỗi phần tử p hay $p(x) \in P_n[x]$ có dạng:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$
$$(a_i \in \mathbb{R},\ \ i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

$P_n[x]$ là một không gian vector với hai phép toán:

$$(p(x), q(x)) \mapsto p(x) + q(x)$$
và $(\lambda, p(x)) \mapsto \lambda p(x)\ (\lambda \in \mathbb{R}).$

Vector ***không*** thuộc $P_n[x]$ là $\theta = 0 + 0x + \ldots + 0x^n$.

3) Tập hợp $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ với hai phép toán cộng ma trận và nhân vô hướng là một không gian vector.

4) Tập hợp nghiệm của một ***hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*** với hai phép toán cộng và nhân vô hướng là một không gian vector.

1.4. Không gian vector con

- **Định nghĩa**

Cho không gian vector V, tập hợp $W \subset V$ được gọi là ***không gian vector con*** (***vectorial subspace***) của V nếu W cũng là một *kgvt*.

- **Nhận xét**

Cho không gian vector V, tập hợp $W \subset V$ là *kgvt* con của V nếu:

$$(x + \lambda y) \in W, \forall x, y \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

VD

- Tập hợp $W=\{\theta,\ \theta\in V\}$ là *kgvt* con của *kgvt* V.

  Vì $\theta+\lambda.\theta=\theta\in V,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R}^2$ không là *kgvt* con của $\mathbb{R}^3$ vì

$$u=(1;\,2)\in\mathbb{R}^2 \text{ nhưng } u\notin\mathbb{R}^3.$$

Bài 1. Khái niệm không gian vector

- Tập hợp $W = \ (\alpha;\ \beta;\ 0;\ldots;0) \,\big|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ là *kgvt* con của $\mathbb{R}^n$.

Ta có $v = (v_1; v_2; 0;\ldots;0) \in W$ $\cancel{\Rightarrow}$ mọi $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$.

Lấy $x = (x_1; x_2; 0;\ldots;0) \in W,\ y = (y_1; y_2; 0;\ldots;0) \in W$.

Ta suy ra

$$x + \lambda y = (x_1 + \lambda y_1;\ x_2 + \lambda y_2;\ 0;\ldots;0) \in W,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Chương 3. Không gian vector

Bài 2. Sự độc lập tuyến tính phụ thuộc tuyến tính

2.1. Tổ hợp tuyến tính

2.2. Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

2.3. Hệ vector trong R^n

2.1. Tổ hợp tuyến tính

- **Định nghĩa**

Trong kgvt V, xét n vector $u_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Tổng

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \ (\alpha_i \in \mathbb{R})$$

được gọi là một ***tổ hợp tuyến tính*** của n vector u_i.

Nếu $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \ (\alpha_i \in \mathbb{R})$ thì ta nói vector x được ***biểu diễn*** (hay biểu thị) ***tuyến tính*** qua n vector u_i (hay hệ vector $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$).

VD 1. Tìm biểu diễn tuyến tính của $x = (1;\ 7;-4)$ qua hai vector $u_1 = (1;-3;\ 2)$ và $u_2 = (2;-1;\ 1)$.

Giải. Giả sử x được biểu diễn tuyến tính qua u_1 và u_2.

Suy ra, tồn tại $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ hay

$$(1;\ 7;-4) = \alpha_1(1;-3;\ 2) + \alpha_2(2;-1;\ 1)$$

Bài 2. Sự độc lập tuyến tính – phụ thuộc tuyến tính

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 = 7 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -3 \\ \alpha_2 = 2. \end{cases}$$

Vậy $x = -3u_1 + 2u_2$.

VD 2. Tìm biểu diễn tuyến tính của $x = (1;\ 3; -1)$ qua hai vector $u_1 = (1; -1;\ 0)$ và $u_2 = (2; -1;\ 0)$.

Giải. Giả sử $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\ (\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 = 3 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 = -1. \end{cases}$$

Do hệ vô nghiệm nên x không có biểu diễn tuyến tính qua u_1 và u_2.

VD 3. Trong $P_2[x]$, tìm biểu thị tuyến tính của vector

$f(x) = -4 + 3x + 2x^2$ qua hệ hai vector:

$u(x) = -1 + x + 3x^2$ và $v(x) = 7 - 5x - x^2$.

Giải. Giả sử $f(x) = \alpha_1 u(x) + \alpha_2 v(x)$ $(\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R})$

hay

$$-4 + 3x + 2x^2 = \alpha_1(-1 + x + 3x^2) + \alpha_2(7 - 5x - x^2)$$

Bài 2. Sự độc lập tuyến tính – phụ thuộc tuyến tính

$$\Leftrightarrow -4+3x+2x^2 = (-\alpha_1+7\alpha_2)+(\alpha_1-5\alpha_2)x + (3\alpha_1-\alpha_2)x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1+7\alpha_2 = -4 \\ \alpha_1-5\alpha_2 = 3 \\ 3\alpha_1-\alpha_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{2} \\ \alpha_2 = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{2}u(x) - \dfrac{1}{2}v(x)$.

VD 4. Tìm m để vector $u = (1;\, m;\, 5)$ được biểu thị tuyến tính qua $u_1 = (1; -3;\, 2)$ và $u_2 = (2; -1;\, 1)$.

Giải. Giả sử $u = au_1 + bu_2 \; (a, b \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 1 \\ -3a - b = m \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ m = -8. \end{cases}$$

Vậy $m = -8$ và $u = 3u_1 - u_2$.

VD 5. Trong $\mathbb{R}^4$, cho 4 vector:

$$u_1 = (1; -1; 0; 1),\ u_2 = (m; m; -1; 2),$$

$$u_3 = (0; 2; 0; m),\ u_4 = (2; 2; -m; 4).$$

Tìm m để u_1 là tổ hợp tuyến tính của u_2, u_3, u_4.

Giải. Giả sử $u_1 = au_2 + bu_3 + cu_4\ (a, b, c \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow a\begin{pmatrix} m \\ m \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -m \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 2. Sự độc lập tuyến tính – phụ thuộc tuyến tính

Yêu cầu đề bài tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} ma + 2c = 1 \\ ma + 2b + 2c = -1 \\ -a - mc = 0 \\ 2a + mb + 4c = 1 \end{cases}$$

có nghiệm.

Bài 2. Sự độc lập tuyến tính – phụ thuộc tuyến tính

Ta có $\quad A\big|B = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 2 & 1 \\ m & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -m & 0 \\ 2 & m & 4 & 1 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -m & 0 \\ 0 & m & 4-2m & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ m & 0 & 2 & 1 \\ 0 & m & 4-2m & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-m^2 & 1 \\ 0 & 0 & 4-2m & 1+m \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-m^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m^3+m^2-4m+2 \end{array}\right) (2-m^2 \neq 0).$$

2.2. Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

- **Định nghĩa**

Trong *kgvt* V, xét n vector u_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

- Hệ chứa n vector $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ được gọi là ***độc lập tuyến tính*** (viết tắt là *đltt*)

  nếu $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \theta$ thì $\alpha_i = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

- Hệ vector không phải là độc lập tuyến tính thì được gọi là ***phụ thuộc tuyến tính*** (viết tắt là *pttt*).

VD 6. Trong $\mathbb{R}^2$, xét sự độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của hệ vector

$$A = \{u_1 = (1; -1),\ u_2 = (2;\ 3)\}.$$

Giải. Ta có:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \theta \Leftrightarrow \alpha_1(1; -1) + \alpha_2(2;\ 3) = (0;\ 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Vậy hệ A là độc lập tuyến tính.

VD 7. Trong $\mathbb{R}^3$, xét sự độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của hệ gồm 3 vector sau:

$$B = \{u_1 = (-1;\ 3;\ 2),\ u_2 = (2;\ 0;\ 1),\ u_3 = (0;\ 6;\ 5)\}.$$

Giải. Ta có $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i u_i = \theta$

$$\Leftrightarrow \alpha_1(-1;\ 3;\ 2) + \alpha_2(2;\ 0;\ 1) + \alpha_3(0;\ 6;\ 5) = (0;\ 0;\ 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 6\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases} \quad (*).$$

Hệ $(*)$ có ma trận hệ số $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

$r(A) = 2 < 3$ nên $(*)$ có nghiệm không tầm thường.

Vậy hệ B là phụ thuộc tuyến tính.

VD 8. Trong $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, xét sự đltt hay pttt của hệ:

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Giải. Ta có $aA + bB + cC = (0_{ij})_{2\times 3}$ $(a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$

hay

$$\begin{pmatrix} a+2b & 2a+3b+c & 0 \\ 3a+4b+2c & 0 & a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bài 2. Sự độc lập tuyến tính – phụ thuộc tuyến tính

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \\ 3a + 4b + 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \quad (**).$$

Do $(**)$ có vô số nghiệm nên hệ W pttt.

Cách khác

Do $2A - B - C = (0_{ij})_{2\times 3}$ nên hệ W pttt.

VD 9. Trong $P_n[x]$, xét sự *đltt* hay *pttt* của hệ:

$$\{u_1 = 1,\ u_2 = x,\ u_3 = x^2, \ldots,\ u_n = x^{n-1},\ u_{n+1} = x^n\}.$$

Giải. Ta có $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i = \theta \ (\lambda_i \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \ldots + \lambda_n x^{n-1} + \lambda_{n+1} x^n$$

$$= 0 + 0x + \ldots + 0x^n$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0.$$

Vậy hệ vector đã cho là độc lập tuyến tính.

VD 10. Trong $P_2[x]$ cho hệ 3 vector:

$$V = \{f_1 = 2x^2;\ f_2 = x^2 + x + 1;\ f_3 = x^2 - x + m\}.$$

Tìm m để hệ V phụ thuộc tuyến tính.

Giải. Ta có $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = \theta$

$$\Leftrightarrow (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)x + (\alpha_2 + m\alpha_3)$$

$$= 0x^2 + 0x + 0.$$

Bài 2. Sự độc lập tuyến tính – phụ thuộc tuyến tính

Yêu cầu đề bài tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \quad \alpha_3 = 0 \\ \qquad\ \ \alpha_2 - \quad \alpha_3 = 0 \\ \qquad\ \ \alpha_2 + m\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

có nghiệm không tầm thường.

Nghĩa là:

$$\det A = 0 \Leftrightarrow 2\ \ m+1\ \ = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Chú ý. Trong trắc nghiệm, ta giải như sau:

- **Bước 1.** Từ hệ vector

$$V = \{f_1 = 2x^2;\ f_2 = x^2 + x + 1;\ f_3 = x^2 - x + m\}$$

ta lập $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix}.$

- **Bước 2.** Hệ *đltt* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$; *pttt* $\Leftrightarrow \det A = 0$.

- **Định lý**

Hệ chứa n vector là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại trong hệ một vector là tổ hợp tuyến tính của n – 1 vector còn lại.

- **Hệ quả**
  - *Nếu hệ có vector không thì hệ pttt.*
  - *Nếu có một bộ phận của hệ pttt thì hệ pttt.*

VD 11.

- Trong $\mathbb{R}^3$, xét hệ:

$$A = \{u_1 = (0;\ 0;\ 0),\ u_2 = (1;\ 0;\ 1),\ u_3 = (0;\ 1;\ 2)\}.$$

Do $1.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3 = \theta$ nên hệ A là pttt.

- Trong $P_4[x]$, xét hệ:

$$B = \{v_1 = x^2;\ v_2 = -3x^2;\ v_3 = (x-1)^3;\ v_4 = x^4\}.$$

Do $\{v_1 = x^2;\ v_2 = -3x^2\}$ là *pttt* nên hệ B là *pttt*.

2.3. Hệ vector trong R^n

▪ Định nghĩa

Trong $\mathbb{R}^n$, xét m vector $u_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})(i = 1,\ldots,m)$

Ma trận dòng của hệ m vector $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_m\}$ là

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow u_1 \\ \longleftarrow u_2 \\ \\ \longleftarrow u_m \end{matrix}$$

VD 12. Hệ vector $\{u_1 = (1;-1;-2),\ u_2 = (4;\ 2;-3)\}$

có ma trận dòng là $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

- **Định lý**

Trong $\mathbb{R}^n$, *giả sử hệ* W *gồm* m *vector và có ma trận dòng là* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

- *Hệ vector* W *là* ***độc lập tuyến tính*** *khi và chỉ khi*

$$\boxed{r(A) = m}$$

- *Hệ vector* W *là* ***phụ thuộc tuyến tính*** *khi và chỉ khi*

$$\boxed{r(A) < m}$$

▪ Hệ quả

- *Trong* $\mathbb{R}^n$, *hệ* ***chứa nhiều hơn n vector*** *thì* ***pttt***.
- *Trong* $\mathbb{R}^n$, *hệ* ***chứa n vector*** *là* ***đltt*** *khi và chỉ khi*

$$\boxed{\det A \neq 0}$$

VD 13. Trong $\mathbb{R}^2$, xét sự *đltt* hay *pttt* của hệ vector

$$B = \{(-1;\, 2;\, 0),\, (2;\, 1;\, 1)\}.$$

Giải. Ta có $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

Do $r(A) = 2$ nên hệ B là độc lập tuyến tính.

VD 14. Trong $\mathbb{R}^3$, xét sự *đltt* hay *pttt* của hệ vector

$$B = \{(-1;\ 2;\ 0),\ (1;\ 5;\ 3),\ (2;\ 3;\ 3)\}.$$

Giải. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do $r(A) = 2 < 3$ nên hệ B phụ thuộc tuyến tính.

VD 15. Trong $\mathbb{R}^3$, tìm điều kiện m để hệ sau là *pttt*:

$$\{(-m;\ 1;\ 1),\ (1-4m;\ 3;\ m+2)\}.$$

Giải. Ta có $A = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1-4m & 3 & m+2 \end{pmatrix}$.

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 3 & 1-4m & m+2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 \end{pmatrix}.$$

Vậy hệ đã cho là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi:

$$r(A) < 2 \Leftrightarrow m = 1.$$

VD 16. Trong $\mathbb{R}^3$, biện luận sự *đltt* và sự *pttt* của hệ

$$W = \{(m;\ 1;\ 1),\ (1;\ m;\ 1),\ (1;\ 1;\ m)\}.$$

Giải. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = (m+2)(m-1)^2.$$

• Hệ W là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi:

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2 \wedge m \neq 1.$$

• Hệ W là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi:

$$\det A = 0 \Leftrightarrow m = -2 \vee m = 1.$$

....

Chương 3. Không gian vector

Bài 3. Số chiều, cơ sở của *kgvt*

3.1. Không gian sinh bởi một hệ vector

3.2. Số chiều và cơ sở của *kgvt*

3.1. Không gian sinh bởi một hệ vector

- **Định nghĩa**

$$< S > = \left\{ v \in V \middle| v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \ (\alpha_i \in \mathbb{R}) \right\}$$

VD 1. Trong $\mathbb{R}^2$, cho $S = \{u_1 = (1;\ 0),\ u_2 = (0;\ 1)\}$.

Gọi $v \in \mathbb{R}^2$, với $v = (x;\ y)$, ta có:

$$v = (x;\ 0) + (0;\ y) = x.u_1 + y.u_2$$

$$\Rightarrow v \in < S > \Rightarrow \mathbb{R}^2 \subset < S >.$$

Mặt khác, do $< S > \subset \mathbb{R}^2$ nên $< S > = \mathbb{R}^2$.

VD 2. Trong $\mathbb{R}^3$, cho hệ

$$S = \{u_1 = (1;\ 0; -1),\ u_2 = (0;\ 1; -1)\}.$$

Gọi $v \in < S >$, với $v = (x;\ y;\ z)$, ta có:

$$v = \alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha;\ \beta; -\alpha - \beta)\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Vậy $< S > = \{v = (\alpha;\ \beta; -\alpha - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

Chứng tỏ $< S > \neq \mathbb{R}^3$?

VD 3. Chứng tỏ $W = \{u_1 = (1;\ 1;\ 1),\ u_2 = (0;\ 1;\ 1)\}$ không phải là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

Giải. Lấy vector $v = (0;\ 0;\ 1) \in \mathbb{R}^3$, ta có:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \Leftrightarrow (0;\ 0;\ 1) = \alpha_1(1;\ 1;\ 1) + \alpha_2(0;\ 1;\ 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \text{(VN)} \Rightarrow v \notin \ < W >.$$

Gọi X là một nghiệm bất kỳ của hệ trên, ta có:

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \ (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}) \Rightarrow X \in \langle X_1,\ X_2 \rangle.$$

VD 4. Cho hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

có hai nghiệm cơ bản là

$$X_1 = (0;\, 1;\, 0;\, 1),\ X_2 = (0; -1;\, 1;\, 0).$$

Vậy $\langle X_1,\ X_2 \rangle$ là không gian vector chứa tất cả các nghiệm của hệ, và được gọi là ***không gian nghiệm***.

3.2. Số chiều và cơ sở

- **Định nghĩa**

• *Hệ gồm n vector độc lập tuyến tính trong kgvt V có n chiều được gọi là một* ***cơ sở (basic)*** *của V.*

• *Kgvt V được gọi là có n chiều* ***(n – dimension)****, nếu tồn tại n vector độc lập tuyến tính và không có bất kỳ hệ độc lập tuyến tính nào chứa nhiều hơn n vector.*

Ký hiệu số chiều của không gian vector V là $\dim V$.

- **Quy ước**

Không gian zero $W = \{\theta\}$ chỉ chứa 1 *vector không* có số chiều là 0.

- ***Chú ý***

Không gian vector có số nhiều hữu hạn được gọi là không gian vector hữu hạn chiều.

- **Định lý**

Nếu hệ S *là một cơ sở của không gian* n *chiều* V *thì*

$$\boxed{<S> = V}$$

VD 5. Trong $\mathbb{R}^2$, xét hệ vector

$$F = \{u_1 = (1; -1),\ u_2 = (0; 1)\}.$$

Do $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ nên hệ F là đltt.

Mặt khác, xét vector $v = (a; b) \in \mathbb{R}^2$, ta có

$$v = au_1 + (a+b)u_2.$$

Suy ra hệ $\{u_1,\ u_2,\ v\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

Vậy $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ và hệ vector F là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

▪ Chú ý

i) Trong $\mathbb{R}^n$, hệ vector

$$E_n = \{e_i = (a_{i1};\, a_{i2};\ldots;\, a_{in}),\ i = 1,2,\ldots,n\}$$

trong đó $a_{ij} = 1$ nếu $i = j$, $a_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Hệ E_n được gọi là ***cơ sở chính tắc*** của $\mathbb{R}^n$.

VD. Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$E_3 = \{e_1 = (1;\ 0;\ 0),\ e_2 = (0;\ 1;\ 0),\ e_3 = (0;\ 0;\ 1)\}.$$

ii) Trong $\mathbb{R}^n$, mọi hệ gồm n vector ***đltt*** đều là cơ sở.

iii) Một không gian vector hữu hạn chiều có thể có ***nhiều cơ sở*** và số vector trong các cơ sở đó là không đổi.

VD 6. Trong $P_2[x]$, xét hệ

$$S = \{f_1 = 1,\ f_2 = x,\ f_3 = x^2\}.$$

Nhận thấy hệ S là độc lập tuyến tính.

Xét $f \in P_2[x]$ với $f = a_0 + a_1x + a_2x^2$, ta có:

$$f = a_0.f_1 + a_1.f_2 + a_2.f_3$$

$$\Rightarrow \{f_1 = 1,\ f_2 = x,\ f_3 = x^2,\ f\}$$ là *pttt*.

Vậy $\dim P_2[x] = 3$ và S là một cơ sở của $P_2[x]$.

Tổng quát, ta có

$$\boxed{\dim P_n[x] = n + 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+}$$

▪ Nhận xét

Trong $\mathbb{R}^n$, gọi A là ma trận dòng tạo bởi m vector của hệ S.

- Ta có $\dim < S > = r(A) \leq n$.
- Nếu $\dim < S > = k$ thì mọi hệ gồm k vector ***đltt*** của S đều là ***cơ sở*** của $< S >$.

VD 7. Trong $\mathbb{R}^4$, cho hệ vector

$$S = \{(1;2;3;4),\ (2;4;9;6),\ (1;2;5;3),\ (1;2;6;3)\}.$$

Tìm số chiều của không gian sinh $< S >$.

Giải. Ma trận dòng của 4 vector là $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy, do $r(A) = 3$ nên $\dim < S > = 3$.

VD 8. Trong $\mathbb{R}^4$, cho hệ vector

$$W = \{u_1 = (-2;\ 4; -2; -4),$$
$$u_2 = (2; -5; -3;\ 1),\ u_3 = (-1;\ 3;\ 4;\ 1)\}.$$

Xác định số chiều và tìm một cơ sở của $< W >$.

Giải. Biến đổi tương tự VD 7, ta được:

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$$

Do hệ $\{u_1,\ u_2\}$ là độc lập tuyến tính nên:

$\dim < W > = 2$, một cơ sở của $< W >$ là $\{u_1,\ u_2\}$.

Trong thực hành, ta thường chọn cơ sở là

$$\{(1;-2;\ 1;\ 2),\ (0;-1;-5;-3)\}.$$

Chương 3. Không gian vector

Bài 4. Tọa độ của vector

4.1. Tọa độ của vector đối với một cơ sở

4.2. Tọa độ của vector trong các cơ sở khác nhau

4.1. Tọa độ của vector đối với một cơ sở

- **Định lý**

Trong không gian vector n chiều V, cho một cơ sở được sắp thứ tự $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Khi đó, mọi vector v của V đều viết được một cách duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính của n vector trong B.

- **Quy ước**

Từ đây về sau, khi nói đến một cơ sở là ta ngầm hiểu rằng cơ sở đó đã được sắp thứ tự.

▪ Định nghĩa

Trong *kgvt* V, cho cơ sở $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Theo định lý trên, $\forall x \in V$ đều viết được một cách duy nhất dưới dạng

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \ (\alpha_i \in \mathbb{R})$$

ký hiệu là $[x]_B = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_n)^T$ và ta gọi nó là ***tọa độ của x trong cơ sở B***.

- **Quy ước**

Trong $\mathbb{R}^n$, ta viết cơ sở chính tắc E_n là E, và viết $[x]_E$ là $[x]$.

- ***Chú ý***

Trong $\mathbb{R}^n$, nếu $x = (x_1;\ldots;x_n)$ thì $[x] = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

VD 1. Trong $\mathbb{R}^2$, cho vector $x = (3; -5)$ và cơ sở $B = \{u_1 = (2; -1),\ u_2 = (1;\ 1)\}$. Tìm $[x]_B$.

Giải. Gọi $[x]_B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, ta có $x = au_1 + bu_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ -a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{8}{3},\ b = -\frac{7}{3}.$$

$$\Leftrightarrow [x] = a[u_1] + b[u_2] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vậy $[x]_B = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}^T$.

VD 3. Trong $\mathbb{R}^2$, xét hai cơ sở:

$$B_1 = \{u_1 = (1;\ 0),\ u_2 = (0; -1)\},$$

$$B_2 = \{v_1 = (2; -1),\ v_2 = (1;\ 1)\}.$$

Cho biết $[x]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tìm $[x]_{B_1}$.

$$[x]$$

Giải. Gọi $[x] = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ và $[x]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, ta có:

$$[x]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = v_1 + 2v_2$$

$$[x]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \alpha u_1 + \beta u_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

1

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow [x] = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

0

$$\text{Vậy } [x]_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4.2. Tọa độ của vector trong các cơ sở khác nhau

4.2.1. Ma trận chuyển cơ sở

Trong không gian vector n chiều V, cho hai cơ sở:

$$B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\},\ B_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

Ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B_1 sang cơ sở B_2 là

$$\boxed{P_{B_1 \to B_2} = \left[[v_1]_{B_1}\ [v_2]_{B_1} \ldots [v_n]_{B_1} \right]}$$

Đặc biệt, trong $\mathbb{R}^n$, ta có

$$P_{E\to B_2} = \left[[v_1] \; [v_2] \ldots [v_n] \right].$$

VD 4. Trong $\mathbb{R}^2$, tìm $P_{B_1 \to B_2}$ với hai cơ sở:

$$B_1 = \{u_1 = (1;\ 0),\ u_2 = (1; -1)\},$$

$$B_2 = \{v_1 = (1; -2),\ v_2 = (3;\ 1)\}.$$

Giải. Gọi $[v_1]_{B_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ và $[v_2]_{B_1} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, ta có:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \ \ 2 \end{cases} \Rightarrow [v_1]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bài 4. Tọa độ của vector

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c = 4 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow [v_2]_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vậy } P_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- **Hệ quả**

Trong $\mathbb{R}^n$, *ta có:*

$$\boxed{P_{B_1 \to B_2} = P_{B_1 \to E} . P_{E \to B_2} = (P_{E \to B_1})^{-1} P_{E \to B_2}}$$

VD 6. Dựa vào hệ quả, giải lại VD 4.

Giải. Ta có $P_{B_1 \to B_2} = P_{E \to B_1}^{-1} P_{E \to B_2}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.2.2. Công thức đổi tọa độ

$$\boxed{[x]_{B_1} = P_{B_1 \to B_2} \cdot [x]_{B_2}}$$

VD 7. Trong $\mathbb{R}^3$, xét hai cơ sở B_1 và B_2. Tìm $[v]_{B_2}$ biết

$$P_{B_2 \to B_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ và } [v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Giải. Ta có $[v]_{B_2} = P_{B_2 \to B_1}.[v]_{B_1} = (5 \quad 11 \quad -6)^T$.

VD 8. Trong $\mathbb{R}^2$, cho cơ sở $A = \{(1;\,2),\ (3;-4)\}$ và vector $x = (3;-2)$. Tìm $[x]_A$.

Giải. Ta có $[x]_A = P_{A\to E}.[x]_E$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

VD 9. Trong $\mathbb{R}^2$, xét hai cơ sở:

$A = \{(2;\ 3),\ (1;-2)\}$ và $B = \{(3;-2),\ (2;\ 5)\}$.

Cho biết $[x]_B = (1 \quad 2)^T$, tìm $[x]_A$.

Giải. Ta có ma trận chuyển cơ sở là:

$$P_{A\to B} = (P_{E\to A})^{-1}.P_{E\to B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vậy $[x]_A = P_{A\to B}.[x]_B = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 13 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 22 \\ 5 \end{pmatrix}.$

……………………………………………………………