Chương 4. Ánh xạ tuyến tính

Bài 1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính

Bài 2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Bài 3. Trị riêng – Vector riêng

Bài 4. Chéo hóa ma trận vuông

Chương 4. Ánh xạ tuyến tính

Bài 1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính

1.1. Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

1.2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

1.2.1. Định nghĩa

1.2.2. Tính chất

1.2.3. Số khuyết và hạng của axtt

1.1. Định nghĩa

Cho X, Y là hai không gian vector trên $\mathbb{R}$.

Ánh xạ $$T : X \longrightarrow Y$$

thỏa mãn hai điều kiện

1) $T(\alpha x) = \alpha T(x), \ \forall x \in X, \ \forall \alpha \in \mathbb{R};$

2) $T(x + y) = T(x) + T(y), \ \forall x, y \in X,$

được gọi là ***ánh xạ tuyến tính*** từ X vào Y.

- **Chú ý**

i) Ký hiệu $T(x)$ còn được viết là Tx.

ii) $T(\theta_X) = \theta_Y \ (\theta_X \in X, \theta_Y \in Y)$.

iii) Hai điều kiện trong định nghĩa tương đương với

$$\boxed{\begin{gathered} T(x+\alpha y) = Tx + \alpha Ty \\ (\forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}) \end{gathered}}$$

VD 1. Chứng tỏ ánh xạ $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được định nghĩa

$$T(x_1;\ x_2;\ x_3) = (x_1 - x_2 + x_3;\ 2x_1 + 3x_2)$$

là ánh xạ tuyến tính.

Giải. Ta xét $x = (x_1;\ x_2;\ x_3)$ và $y = (y_1;\ y_2;\ y_3)$.

Với $\alpha \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có:

$$T(x + \alpha y) = T(x_1 + \alpha y_1;\ x_2 + \alpha y_2;\ x_3 + \alpha y_3)$$

$$= ((x_1 + \alpha y_1) - (x_2 + \alpha y_2) + (x_3 + \alpha y_3);$$

$$2(x_1 + \alpha y_1) + 3(x_2 + \alpha y_2))$$

$$= (x_1 - x_2 + x_3;\ 2x_1 + 3x_2)$$

$$+ \alpha(y_1 - y_2 + y_3;\ 2y_1 + 3y_2)$$

$$= Tx + \alpha Ty.$$

Chú ý. $T((0;0;0)) = (0;0).$

VD 2. Chứng tỏ ánh xạ f có công thức

$$f(x;\, y) = (x - y;\, 2 + 3y)$$

không phải là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$.

Giải. Trong $\mathbb{R}^2$, xét $u = (1;\, 2)$ và $v = (0; -1)$, ta có:

$$f(u + v) = f(1;\, 1) = (1 - 1;\, 2 + 3.1) = (0;\, 5),$$

$$f(u) + f(v) = (-1;\, 8) + (1; -1) = (0;\, 7)$$

$$\Rightarrow f(u + v) \neq f(u) + f(v).$$

1.2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

1.2.1. Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính $f : X \to Y$.

- *Nhân của* f là $\mathrm{Ker}(f) = \quad x \in X \big| f(x) = \theta_Y \quad .$
- *Ảnh của* f là $\mathrm{Im}(f) = \quad f(x) \in Y \big| \, x \in X \quad .$

1.2.2. Tính chất

i) $\mathrm{Ker}(f)$ *là một không gian con của* X.

ii) $\mathrm{Im}(f)$ *là không gian con của* Y.

iii) f *là* ***đơn ánh*** *khi và chỉ khi* $\mathrm{Ker}(f) = \{\theta_X\}$.

4i) f *là toàn ánh khi và chỉ khi* $\mathrm{Im}(f) = Y$.

5i) *Nếu* $< S > = X$ *thì* $< f(S) > = \mathrm{Im}(f)$.

VD 3. Cho axtt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được định nghĩa

$$f(x_1;\ x_2;\ x_3) = (x_1 + x_2 - 4x_3;\ x_1 - x_2).$$

Tìm $\mathrm{Ker}(f)$ và $\mathrm{Im}(f)$.

- Tìm $\mathrm{Ker}(f)$:

Ta có $f(x_1;\ x_2;\ x_3) = (0;\ 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R})$$

Vậy $\mathrm{Ker}(f) = \{x = (2\alpha;\ 2\alpha;\ \alpha) \in \mathbb{R}^3,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

VD 3. Cho axtt $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được định nghĩa

$$f(x_1;\ x_2;\ x_3) = (x_1 + x_2 - 4x_3;\ x_1 - x_2).$$

Tìm $\mathrm{Ker}(f)$ và $\mathrm{Im}(f)$.

• Tìm $\mathrm{Im}(f)$.

Trong $\mathbb{R}^3$, xét cơ sở chính tắc ta có:

$$f(1;\ 0;\ 0) = (1 + 0 - 0;\ 1 - 0) = (1;\ 1),$$

$$f(0;\ 1;\ 0) = (0 + 1 - 0;\ 0 - 1) = (1; -1),$$

$$f(0;\ 0;\ 1) = (0 + 0 - 4;\ 0 - 0) = (-4;\ 0).$$

Do $\left\langle (1;\ 0;\ 0), (0;\ 1;\ 0), (0;\ 0;\ 1) \right\rangle = \mathbb{R}^3$ nên:

$$\mathrm{Im}(f) = \left\langle (1;\ 1), (1; -1), (-4;\ 0) \right\rangle = \left\langle (1;\ 1), (1; -1) \right\rangle$$

$$= \{y = (\alpha + \beta;\ \alpha - \beta) \in \mathbb{R}^2\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})\}.$$

- **Định lý**

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim X}$$

- **Hệ quả**

Nếu axtt $f : X \to Y$ có $\dim X = \dim Y$ thì

f *là* ***song ánh*** $\Leftrightarrow$ f *là* ***đơn ánh*** $\Leftrightarrow$ f *là* ***toàn ánh***.

1.2.3. Số khuyết và hạng của ánh xạ tuyến tính

a) Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính $f : X \to Y$.

- *Số khuyết của* f là $d(f) = \dim \operatorname{Ker}(f)$.
- *Hạng của* f là $r(f) = \dim \operatorname{Im}(f)$.

b) Thuật toán tìm *d*(*f*) và *r*(*f*)

Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

- **Tìm *d*(*f*)**

Bước 1. Giải hệ phương trình thuần nhất $f(x)=\theta\ (*)$.

Bước 2. Số chiều ***không gian nghiệm*** của $(*)$ là $d(f)$, các ***nghiệm cơ bản*** lập thành một ***cơ sở*** của $\mathrm{Ker}(f)$.

- **Tìm r(*f*)**

Bước 1. Chọn một cơ sở $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ trong $\mathbb{R}^n$ và lập *ma trận dòng* A của hệ vector $\{f(u_1),\ f(u_2), \ldots,\ f(u_n)\}$.

Bước 2. Đưa A về ma trận bậc thang A'.

- Số ***dòng khác không*** của A' là $r(f)$.
- Các ***vector dòng tương ứng*** trong A' lập thành một ***cơ sở*** của $\mathrm{Im}(f)$.

VD 5. Cho axtt $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được định nghĩa

$$f(x_1;\, x_2;\, x_3) = (\boxed{x_1 + x_2};\boxed{-x_2 + x_3};\ \boxed{x_2 - x_3}).$$

Tìm số khuyết và hạng của f.

Chỉ ra một cơ sở của các không gian $\mathrm{Ker}(f)$ và $\mathrm{Im}(f)$.

- Tìm số khuyết của f

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\quad = 0 \\ \quad - x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = \alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad (*). \\ x_3 = \alpha \end{cases}$$

Suy ra, nghiệm cơ bản của $(*)$ là $X_1 = (-1;\, 1;\, 1)$.

Vậy $d(f) = 1$ và một cơ sở của $\operatorname{Ker}(f)$ là $\{(-1;\, 1;\, 1)\}$.

Bài 1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính

- Tìm hạng của f

Trong $\mathbb{R}^3$, xét cơ sở chính tắc ta có:

$$\begin{cases} f(1;\ 0;\ 0) = (1;\ 0;\ 0) \\ f(0;\ 1;\ 0) = (1; -1;\ 1) \\ f(0;\ 0;\ 1) = (0;\ 1; -1) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(f) = 2$$

và một cơ sở của $\mathrm{Im}(f)$ là $\{(1;\ 0;\ 0),\ (0; -1;\ 1)\}$.

Chương 4. Ánh xạ tuyến tính

Bài 2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

2.1. Khái niệm ma trận của ánh xạ tuyến tính

2.1.1. Định nghĩa ma trận của axtt

2.1.2. Tính chất của ánh xạ tuyến tính

2.2. Định lý chuyển đổi ma trận của axtt

Từ đây về sau, ta chỉ xét loại ánh xạ tuyến tính

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Ta gọi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là ***toán tử tuyến tính***

hay còn gọi là ***phép biến đổi tuyến tính***.

Bài 2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

2.1. Khái niệm ma trận của ánh xạ tuyến tính

2.1.1. Định nghĩa

Cho axtt $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ và hai cơ sở của $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ lần lượt là $B_1=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ và $B_2=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$

Ma trận $A=\left[[f(u_1)]_{B_2}\ [f(u_2)]_{B_2} \ldots [f(u_n)]_{B_2} \right] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

được gọi là *ma trận của ánh xạ tuyến tính f* trong cặp cơ sở B_1 và B_2, ký hiệu là $[f]_{B_1}^{B_2}$ hay viết đơn giản là A.

Bài 2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

$$\begin{cases} f(u_1) = \boxed{a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + \ldots + a_{m1}v_m} \\ f(u_2) = \boxed{a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + \ldots + a_{m2}v_m} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ f(u_n) = \boxed{a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + a_{3n}v_3 + \ldots + a_{mn}v_m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow [f]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$[f(u_1)]_{B_1}^{B_2} \quad [f(u_2)]_{B_1}^{B_2} \quad [f(u_3)]_{B_1}^{B_2} \quad \cdots \quad [f(u_n)]_{B_1}^{B_2}$$

Chú ý

$$[f]_{B_1}^{B_2}$$

$B_2 \longrightarrow$ **Số vector trong cơ sở sau bằng *số dòng* của ma trận**

$B_1 \longrightarrow$ **Số vector trong cơ sở đầu bằng *số cột* của ma trận**

▪ Trường hợp đặc biệt

Nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *và* $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^n$ *thì*

$$\boxed{[f]_B^B = [f]_B = \left[f(u_1)\right]_B \left[f(u_2)\right]_B \ldots \left[f(u_n)\right]_B \in M_n(\mathbb{R})}$$

Bài 2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

VD. Ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$

$$f(x)=(x;\ 0;\ldots;\ 0)$$

Vì $E_1=\{u=1\}$

$\Rightarrow f(1)=(1;\ 0;\ldots;\ 0)$ nên

$$[f(u)]_{E_n}=(1\quad 0\quad \cdots\quad 0)^T.$$

có $\left[f\right]_{E_1}^{E_n}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$

VD. Axtt $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ g(x_1;\ x_2;\ldots;\ x_n) = x_1$

có $[g]_{E_n}^{E_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Vì $f(u_1) = f(1;0;\ldots;0) = 1 \Rightarrow [f(u_1)]_{E_1} = (1)$,

$f(u_2) = f(0;1;\ldots;0) = 0 \Rightarrow [f(u_2)]_{E_1} = (0),\ldots$

$f(u_n) = f(0;0;\ldots;1) = 0 \Rightarrow [f(u_n)]_{E_1} = (0)$.

VD. Toán tử tuyến tính đồng nhất $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{Id}(x) = x \text{ có } [\mathrm{Id}]_{E_n} = I_n.$$

VD 1. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

$$f(x_1;\,x_2;\,x_3)=(x_2;\,x_1-2x_3).\ \text{Tìm } A=[f]^{E_2}_{E_3}.$$

Giải. Ta có:

$$f(e_2)=f(0;\,1;\,0)=(1;\,0)\Rightarrow[f(e_2)]_{E_2}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$f(e_1)=f(1;\,0;\,0)=(0;\,1)\Rightarrow[f(e_1)]_{E_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$f(e_3)=f(0;\,0;\,1)=(0;-2)\Rightarrow[f(e_3)]_{E_2}=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}.$$

Vậy $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}.$

Bài 2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

VD 2. Tìm $A = [f]_{E_3}$, cho biết toán tử tuyến tính

$$f(x_1;\, x_2;\, x_3) = (x_1;\, x_1 - 2x_3;\, x_1 + 2x_2 + 3x_3).$$

Giải. Ta có:

$$f(e_1) = (1;\, 1;\, 1) \Rightarrow [f(e_1)]_{E_3} = (1 \quad 1 \quad 1)^T$$

$$f(e_2) = (0;\, 0;\, 2) \Rightarrow [f(e_2)]_{E_3} = (0 \quad 0 \quad 2)^T$$

$$f(e_3) = (0; -2;\, 3) \Rightarrow [f(e_3)]_{E_3} = (0 \quad -2 \quad 3)^T.$$

Vậy $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Nhận xét

- VD 1.

$$f(x_1;x_2;x_3) = (0x_1 + 1x_2 + 0x_3;\ 1x_1 + 0x_2 - 2x_3)$$

$$\Rightarrow [f]_{E_3}^{E_2} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array}.$$

Bài 2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

- VD 2. $f(x_1;x_2;x_3)$

$= (1x_1 + 0x_2 + 0x_3;\ 1x_1 + 0x_2 - 2x_3;\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3).$

$$\Rightarrow [f]_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Chú ý

Giả sử $[f]_{E_2}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ thì $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ và

$$f(x_1; x_2) = (x_1 + 4x_2;\ 2x_1 + 5x_2;\ 3x_1 + 6x_2).$$

VD 3. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Tìm ma trận $A=[f]_{E_2}^{E_3}$, biết:

$f(1;\,1)=(0;\,2;\,1)$ và $f(2;-1)=(3;\,1;-1)$.

Phân tích

Ta đi tìm biểu thức $f(x;\,y)$ khi đã biết $f(1;\,1)$, $f(2;-1)$

$\Rightarrow f(x;\,y)=a.f(1;\,1)+b.f(2;-1)$

$\Rightarrow f(x;\,y)=f(a.(1;\,1)+b.(2;-1))$

$\Leftarrow (x;\,y)=a(1;\,1)+b(2;-1) \Leftarrow a,\,b=\,?$

Giải. Giả sử $(x;\,y)=a(1;\,1)+b(2;-1)$, ta có:

$$\begin{cases} a+2b=x \\ a-b=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}y \\ b=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}y \end{cases}$$

Bài 2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

$$\Rightarrow f(x;\ y) = a.f(1;\ 1) + b.f(2;-1)$$
$$= \left(\frac{x}{3} + \frac{2y}{3}\right).(0;\ 2;\ 1) + \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{3}\right).(3;\ 1;-1)$$
$$\Rightarrow f(x;\ y) = (x - y;\ x + y;\ y).$$

Vậy $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

VD 4. Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x_1;\, x_2) = (x_1 - 2x_2;\, 3x_1 + 5x_2).$$

Tìm $[f]_B^{E_2}$ và $[f]_B$ với cơ sở $B = \{(1;-1),\, (2;-3)\}$.

- Tìm $[f]_B^{E_2}$:

$$f(1;-1) = (3;-2) \Rightarrow [f(1;-1)]_{E_2} = (3 \quad -2)^T$$

$$f(2;-3) = (8;-9) \Rightarrow [f(2;-3)]_{E_2} = (8 \quad -9)^T.$$

Vậy $[f]_B^{E_2} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -2 & -9 \end{pmatrix}$

- Tìm $[f]_B$:

Phân tích. Ta đi tìm $[f(1;-1)]_B$ và $[f(2;-3)]_B$ khi biết $[f(1;-1)]_{E_2}$ và $[f(2;-3)]_{E_2}$.

Ta dùng công thức $[f(x)]_B = P_{B\to E_2}.[f(x)]_{E_2}$

$$P_{B\to E_2} = (P_{E_2\to B})^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

$$[f(1;-1)]_B = P_{B\to E_2}.\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]_B = \begin{pmatrix}5 & 6\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$[f(2;-3)]_B = P_{B\to E_2}.\begin{pmatrix}8\\ -9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\ 1\end{pmatrix}$$

2.1.2. Tính chất của ánh xạ tuyến tính

a) Nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *là ánh xạ tuyến tính và* B_1, B_2 *là hai cơ sở tương ứng của* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ *thì*

$$\boxed{r(f) = r([f]_{B_1}^{B_2})}$$

và

$$\boxed{[f(x)]_{B_2} = [f]_{B_1}^{B_2} \cdot [x]_{B_1}}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

Bài 2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

b) Nếu $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *là các ánh xạ tuyến tính và* B_1, B_2, B_3 *là các cơ sở của* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^k$ *thì*

$$[(f \pm g)(x)]_{B_2} = [f]_{B_1}^{B_2} \pm [g]_{B_1}^{B_2} \,.[x]_{B_1} \;\forall x \in \mathbb{R}^n$$

và

$$[(f \circ h)(x)]_{B_3} = [h]_{B_2}^{B_3}.[f]_{B_1}^{B_2} \,.[x]_{B_1} \;\forall x \in \mathbb{R}^n.$$

VD 5. Cho axtt $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ và 2 cơ sở tương ứng:

$$B_1 = \{(1;\,0;-1),\,(0;-1;-1),\,(1;-1;-1)\},\ B_2.$$

Tìm $[f(x)]_{B_2}$, biết $[f]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $x = (1;\,2;\,3)$.

Phân tích. Tìm $[x]_{B_1}$ và áp dụng $[f(x)]_{B_2} = [f]_{B_1}^{B_2}.[x]_{B_1}$.

Bài 2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Ta có $P_{B_1\to E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Vậy $[f(x)]_{B_2} = [f]_{B_1}^{B_2}.[x]_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow [x]_{B_1} = P_{B_1\to E_3}.[x] = (-1 \quad -4 \quad 2)^T.$$

VD 6. Cho axtt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ có $[f]_{E_2}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Tìm ma trận $[f]_{B_1}^{B_2}$.

Trong đó, hai cơ sở tương ứng là:

$B_1 = \{u_1 = (1;\ 1),\ u_2 = (1;\ 2)\}$,

$B_2 = \{v_1 = (1;\ 0;\ 1),\ v_2 = (1;\ 1;\ 1);\ v_3 = (1;\ 0;\ 0)\}$.

Phân tích. Ta tìm $[f(u_1)]_{B_2}$ và $[f(u_2)]_{B_2}$ khi biết $[f]_{E_2}^{E_3}$.

- Tìm $[f(u_1)]_{B_2}$ qua công thức đổi cơ sở

$$[f(u_1)]_{B_2} = P_{B_2 \to E_3} . [f(u_1)]_{E_3}.$$

- Tìm $[f(u_1)]_{E_3}$ qua công thức trong tính chất

$$[f(u_1)]_{E_3} = [f]_{E_2}^{E_3} . [u_1]_{E_2}.$$

Bài 2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Tương tự: $[f(u_2)]_{E_3} = [f]_{E_2}^{E_3}\cdot[u_2]_{E_2} = \begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 7\end{pmatrix}$

$[f(u_2)]_{B_2} = \begin{pmatrix}6\\ 4\\ -15\end{pmatrix}$. Vậy $[f]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix}5 & 6\\ 2 & 4\\ -9 & -15\end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow [f(u_1)]_{B_2} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ 2\\ -9\end{pmatrix},$$

2.2. Định lý chuyển đổi ma trận của ánh xạ tuyến tính

- **Định lý**

Giả sử B_1, B_2 *là hai cơ sở của* $\mathbb{R}^n$ *và* B_1', B_2' *là hai cơ sở của* $\mathbb{R}^m$.

Nếu f *là ánh xạ tuyến tính từ* $\mathbb{R}^n$ *vào* $\mathbb{R}^m$ *thì*

$$\boxed{[f]_{B_2}^{B_2'} = P_{B_2' \to B_1'} . [f]_{B_1}^{B_1'} . P_{B_1 \to B_2}}$$

Bài 2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

$$[f]_{B_2}^{B_2'} = P_{B_2' \to B_1'} \cdot [f]_{B_1}^{B_1'} . P_{B_1 \to B_2}$$

Bài 2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

$$[f]_{B_1}^{B_1'} = A_1 \qquad P' \qquad A_2 = [f]_{B_2}^{B_2'}$$

$$P$$

$$A_2 = (P')^{-1}.A_1.P$$

▪ Trường hợp riêng

Nếu $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *là toán tử tuyến tính,* B *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^n$ *và* $P = P_{E\to B}$ *thì*

$$\boxed{[f]_B = P^{-1}.[f]_E.P}$$

VD 8. Tìm $[f]_F$, biết toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x;\, y;\, z) = (x+y+z;\, x-y+z;\, x+y-z)$$

và cơ sở $F = \{(2;\,1;\,0),\, (1;\,0;\,1),\, (-1;\,0;\,1)\}$.

Giải. Ta có

$$[f]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = P_{E\to F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bài 2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Vậy $\left[f\right]_F = P^{-1}\left[f\right]_E P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

VD 9. Cho axtt $f(x;\ y;\ z) = (x + y - z;\ x - y + z)$.

Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở:

$$B = \{(1;\ 1;\ 0),\ (0;\ 1;\ 1),\ (1;\ 0;\ 1)\}$$

và $B' = \{(2;\ 1),\ (1;\ 1)\}$.

Giải. (Áp dụng công thức $[f]_B^{B'} = P_{B'\to E_2}^{-1}[f]_{E_3}^{E_2}P_{E_3\to B}$).

$[f]_{E_3}^{E_2} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $P_{B'\to E_2} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ và $P_{E_3\to B} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Vậy $[f]_B^{B'} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

Chương 4. Ánh xạ tuyến tính

Bài 3. Trị riêng – Vector riêng

3.1. Ma trận đồng dạng
3.2. Đa thức & phương trình đặc trưng
3.3. Trị riêng, vector riêng
3.4. Không gian con riêng
3.5. Định lý Cayley – Hamilton

3.1. Ma trận đồng dạng

- **Định nghĩa**

Hai ma trận vuông cùng cấp A *và* B *được gọi là đồng dạng với nhau nếu tồn tại ma trận khả nghịch* P *thỏa*

$$\boxed{B = P^{-1}.A.P}$$

VD. Vì $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ nên

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ là đồng dạng với nhau.

▪ Tính chất

Hai ma trận của một ***toán tử tuyến tính*** *trong* ***hai cơ sở khác nhau*** *thì đồng dạng với nhau.*

3.2. Đa thức và phương trình đặc trưng

Định nghĩa

- *Đa thức bậc* n *của* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)}$$

được gọi là ***đa thức đặc trưng*** *(characteristic polynomial) của* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *và phương trình* $P_A(\lambda) = 0$ *được gọi là* ***phương trình đặc trưng*** *của* A.

- *Đa thức bậc* n *của* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)}$$

được gọi là đa thức đặc trưng của toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($A = [f]_B$, B là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$) và *phương trình* $P_f(\lambda) = 0$ *được gọi là phương trình đặc trưng của* f.

VD. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, ta có:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$$

▪ Định lý

Hai ma trận đồng dạng với nhau thì có cùng đa thức đặc trưng.

VD 1. Cho toán tử tuyến tính

$$f(x;y;z) = (x-y;\, y-z;\, z+x).$$

Tìm phương trình đặc trưng của f.

Giải. Gọi $A = [f]_E$, ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vậy $P_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Bài 3. Trị riêng – Vector riêng

$$\Leftrightarrow -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda = 0.$$

3.3. Trị riêng, vector riêng

▪ Định nghĩa

Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ và $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- *Số thực* λ *được gọi là* **trị riêng** (eigenvalue) *của* f *hay của* A *nếu tồn tại vector* $x \in \mathbb{R}^n$ $(x \neq 0)$ *sao cho*

$$\boxed{f(x) = \lambda x} \ \textit{hay} \ \boxed{A[x] = \lambda[x]}$$

- *Vector* $x \neq 0$ *thỏa* $f(x) = \lambda x$ *được gọi là* **vector riêng** (eigenvector) *của* f *hay* A *ứng với trị riêng* λ.

VD 2. Cho $f(x_1;\, x_2) = (4x_1 - 2x_2;\, x_1 + x_2)$.

- Ta có: $f(2;\, 1) = (6;\, 3) = 3(2;\, 1)$.

Vậy $x = (2;\, 1)$ là vector riêng của f ứng với trị riêng $\lambda = 3$.

- Mặt khác, ta có:

$$[f] = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [f][x] = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda[x].$$

Vậy $x = (2;\, 1)$ cũng là vector riêng của $A = [f]$ ứng với trị riêng $\lambda = 3$.

▪ Định lý

Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *và một cơ sở* B *của* $\mathbb{R}^n$.

- *Vector* $x \in \mathbb{R}^n$ $(x \neq 0)$ *là vector riêng của* f *ứng với trị riêng* λ *khi và chỉ khi* $[x]_B$ *là vector riêng của* $[f]_B$ *ứng với* λ.
- *Số thực* λ *là trị riêng của* f *khi và chỉ khi* λ *là trị riêng của* $[f]_B$.

▪ Chú ý

i) Từ đây về sau, ta xem đa thức đặc trưng và phương trình đặc trưng của toán tử tuyến tính f và ma trận $[f]_B$ là như nhau.

ii) Các vector riêng của ma trận A ứng với các trị riêng khác nhau thì ***độc lập tuyến tính***.

▪ Nhận xét

Ta có $A[x] = \lambda[x] \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)[x] = [\theta] \quad (*)$.

Để $x \neq \theta$ là vector riêng của A thì $(*)$ phải có nghiệm ***không tầm thường***.

Suy ra $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Vậy λ là ***nghiệm của phương trình đặc trưng***.

▪ Thuật toán tìm trị riêng và vector riêng của ma trận *A*

- **Bước 1.** Giải $P_A(\lambda) = 0$ để tìm trị riêng λ.
- **Bước 2.** Giải hệ thuần nhất $(A - \lambda I)[x] = [\theta]$.

  Nghiệm ***không tầm thường*** của hệ là vector riêng ứng với λ.

VD 4. Tìm trị riêng và VTR của $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Giải. Phương trình đặc trưng:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$ là hai trị riêng của A.

- Với $\lambda_1 = -1$, ta có:

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + \quad x_3 = 0 \\ \quad x_2 \quad = 0 \end{cases}$$

Chọn $x_1 = 1 \Rightarrow x_3 = -1$, ta được VTR $u_1 = (1, 0, -1)$.

Suy ra các vector có dạng $(\alpha, 0, -\alpha)$ $(\alpha \neq 0)$ cũng là vector riêng.

- Với $\lambda_2 = 1$, ta có:

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - x_3 = 0.$$

Chọn $x_1 = 1, x_2 = 0$, ta được VTR $u_2 = (1; 0; 1)$.

Chọn $x_1 = 0, x_2 = 1$, ta được VTR $u_3 = (0; 1; 0)$.

Các vector có dạng $\beta(1; 0; 1), \gamma(0; 1; 0)\ (\beta; \lambda \neq 0)$ cũng là vector riêng.

▪ Chú ý

Do $\det(A - \lambda I_n) = 0$ nên hệ phương trình

$$(A - \lambda I_n)[x] = [\theta]$$

luôn có vô số nghiệm và mỗi nghiệm cơ bản của hệ là một vector riêng cụ thể.

Ta gọi vector riêng cụ thể này là ***vector riêng cơ sở***.

3.4. Không gian con riêng

- **Định nghĩa**

Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ có trị riêng λ.

Tập hợp tất cả các vector $x \in \mathbb{R}^n$ *thỏa* $f(x) = \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}$ *(kể cả vector không)* là *một không gian con* *của* $\mathbb{R}^n$, *ký hiệu* là $E(\lambda)$.

Khi đó, $E(\lambda)$ được gọi là ***không gian con riêng*** (*eigenvector space*) ứng với λ.

▪ Chú ý

i) Hệ nghiệm cơ bản của hệ $(A-\lambda I)[x]=[\theta]$ cho ta hệ vector cơ sở và tạo thành ***một cơ sở*** của không gian con riêng (gọi tắt là ***không gian riêng***) $E(\lambda)$.

ii) $\dim E(\lambda) = n - r(A-\lambda I)$.

iii) Nếu λ là *nghiệm bội k* của $P_A(\lambda)=0$ thì $\dim E(\lambda) \le k$.

VD 5. Trong VD 4, ta có

• Từ nghiệm cơ bản của $(A - \lambda_1 I)[x] = [\theta]$ ta suy ra 2 vector cơ sở là $u_1 = (1;\ 0;\ 1)$ và $u_3 = (0;\ 1;\ 0)$.

Vậy $E(1) = \left\langle (1;\ 0;\ 1),\ (0;\ 1;\ 0) \right\rangle$ và $\dim E(1) = 2$.

• Từ nghiệm cơ bản của $(A - \lambda_2 I)[x] = [\theta]$ ta suy ra vector cơ sở là $u_2 = (1;\ 0;\ -1)$.

Vậy $E(-1) = \left\langle (1;\ 0;\ -1) \right\rangle$ và $\dim E(-1) = 1$.

VD 6. Tìm số chiều của các không gian con riêng ứng với các trị riêng của ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Giải. Phương trình đặc trưng

$$\left|B - \lambda I\right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ -4 & -6-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -4 & -6-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6+\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2-\lambda & 6+\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(2+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2.$$

- Với $\lambda_1 = 1$, ta có:

$$B-\lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -4 & -7 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(B-\lambda_1 I) = 2 \Rightarrow \dim E(\lambda_1) = 3 - r(B-\lambda_1 I) = 1.$$

- Với $\lambda_2 = -2$, ta có:

$$B-\lambda_2 I = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy $\dim E(\lambda_2) = 3 - r(B-\lambda_2 I) = 1.$

VD 7. Tìm cơ sở của các không gian riêng của ma trận

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải. Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 2. \end{array}\right.$$

- Với $\lambda = 1$, ta có

$$C - 1.I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 = (1;\, 0;\, 2).$$

Vậy $E(1)$ có một cơ sở là $\{u_1 = (1;\, 0;\, 2)\}$.

- Với $\lambda = 2$, ta có

$$C - 2.I \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Vậy $E(2)$ có một cơ sở là $\{u_2 = (1;\, 1;\, 2)\}$.

VD 8. Tìm các không gian riêng của toán tử tuyến tính
$f(x;y;z) = (x+3y+3z;\,-3x-5y-3z;\,3x+3y+z).$

Giải. Ta có $[f] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

Đa thức đặc trưng $P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda+2)^2.$

Suy ra $\lambda = -2$ và $\lambda = 1$ là hai trị riêng của f.

Vậy $E(-2) = \left\langle u_1 = (1;\ 0; -1),\ u_2 = (0;\ 1; -1) \right\rangle$

• Với $\lambda = -2$: $[f] - (-2).I = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$= \{x = (\alpha;\ \beta; -\alpha - \beta) \in \mathbb{R}^3\ (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R})\}.$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = (1;\ 0; -1) \\ u_2 = (0;\ 1; -1). \end{cases}$$

Bài 3. Trị riêng – Vector riêng

- Với $\lambda = 1$: $[f] - 1.I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_3 = (1; -1; 1).$$

Vậy $E(1) = \{x = (\alpha; -\alpha; \alpha) \in \mathbb{R}^3 \ (\alpha \in \mathbb{R})\}$.

3.5. Định lý Cayley – Hamilton

Nếu toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *có ma trận biểu diễn trong một cơ sở nào đó là* A *và đa thức đặc trưng là* $P_f(\lambda)$ *thì*

$$\boxed{P_f(A) = (0_{ij})_n}$$

VD 9. Xét toán tử tuyến tính $f = (4x - 2y;\ x + y)$,

ta có $A = [f] = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_f(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$

Khi đó

$$P_f(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 6I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

VD 10. Cho $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính $\det B$, trong đó

$$B = A^7 - 10A^6 + 14A^5 + 4A^4 + 8I_3.$$

Giải. Ta có $P_A(\lambda) = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 14\lambda + 4$

$$\Rightarrow A^3 - 10A^2 + 14A + 4I_3 = (0_{ij})_3$$

$$\Rightarrow A^7 - 10A^6 + 14A^5 + 4A^4 = (0_{ij})_3$$

$$\Rightarrow B = 8I_3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 8^3 = 512.$$

Chương 4. Ánh xạ tuyến tính

Bài 4. Chéo hóa ma trận vuông

4.1. Khái niệm ma trận chéo hóa được

4.2. Điều kiện ma trận chéo hóa được

4.3. Ma trận làm chéo hóa ma trận vuông

4.4. Thuật toán chéo hóa ma trận vuông

4.1. Khái niệm ma trận chéo hóa được

Trong phần này, ta xét $A \in M_n(\mathbb{R})$ là ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ trong một cơ sở B nào đó của $\mathbb{R}^n$.

Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là chéo hóa được nếu A ***đồng dạng với ma trận đường chéo*** *D, nghĩa là, tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho* $P^{-1}AP = D$.

Khi đó, ta nói ma trận P **làm chéo hóa** ma trận A.

VD. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ là chéo hóa được, vì có

ma trận $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ thỏa $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.2. Điều kiện ma trận chéo hóa được

- **Định lý 1**

Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ *là* ***chéo hóa được*** *khi và chỉ khi trong* $\mathbb{R}^n$ *có* ***một cơ sở gồm n vector riêng*** *của* A.

- **Hệ quả**

Nếu ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ *có* ***n trị riêng phân biệt*** *thì chéo hóa được.*

▪ Định lý 2

Giả sử $A \in M_n(\mathbb{R})$ *có* k *trị riêng* λ_i $(i = 1, \ldots, k)$ *phân biệt và ta đặt* $n_i = \dim E(\lambda_i)$. *Khi đó, ba điều sau đây là tương đương*

1) Ma trận A *là chéo hóa được;*

2) Đa thức đặc trưng của A *có dạng*

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{n_k};$$

3) $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$

4.3. Ma trận làm chéo hóa ma trận vuông

Giả sử ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ *chéo hóa được. Khi đó, tồn tại ma trận P khả nghịch thỏa* $P^{-1}AP = D$ *với*

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

Xét ma trận khả nghịch $P = ([u_1]\,[u_2]\ldots[u_n])$, trong đó

$$[u_i] = (\alpha_{1i}\ \alpha_{2i}\ \cdots\ \alpha_{ni})^T\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ta có $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow AP = PD$

$$\Rightarrow A([u_1]\,[u_2]\ldots[u_n]) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bài 4. Chéo hóa ma trận vuông

$$\Rightarrow A([u_1]\,[u_2]\ldots[u_n]) = \begin{pmatrix} \lambda_1\alpha_{11} & \lambda_2\alpha_{12} & \cdots & \lambda_n\alpha_{1n} \\ \lambda_1\alpha_{21} & \lambda_2\alpha_{22} & \cdots & \lambda_n\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1\alpha_{n1} & \lambda_2\alpha_{n2} & \cdots & \lambda_n\alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A[u_1]\; A[u_2]\ldots A[u_n]) = (\lambda_1[u_1]\; \lambda_2[u_2]\ldots\lambda_n[u_n])$$

$$\Rightarrow A[u_i] = \lambda_i[u_i]\; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Suy ra λ_i là *trị riêng* và u_i là *vector riêng* ứng với λ_i của ma trận A.

- **Kết luận**

1) *P là ma trận có các cột là các* ***vector riêng cơ sở*** *của ma trận A.*

2) *Ma trận chéo D gồm các* ***trị riêng tương ứng*** *với các* ***vector riêng trong ma trận P****.*

▪ Nhận xét

Ta có $P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1}$

$$\Rightarrow A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$$

$$\ldots \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1}.$$

$$\boxed{A^k = P.\mathrm{diag}(\lambda_1^k \quad \lambda_2^k \quad \cdots \quad \lambda_n^k).P^{-1}}$$

VD 1. Xét ma trận A trong VD 8 (mục 3.4), ta có

• Ứng với trị riêng $\lambda_1 = -2$ có 2 vector riêng cơ sở là:

$$u_1 = (1;\ 0; -1),\ u_2 = (0;\ 1; -1).$$

• Ứng với trị riêng $\lambda_2 = 1$ có 1 vector riêng cơ sở là

$$u_3 = (1; -1;\ 1).$$

Suy ra $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ và $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 4. Chéo hóa ma trận vuông

Khi đó, ta có $A^{10} = P.D^{10}.P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1023 & -1023 \\ 1023 & 2047 & 1023 \\ -1023 & -1023 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4. Thuật toán chéo hóa ma trận vuông

Bước 1. Giải $\left|A-\lambda I\right|=0$ để tìm ***trị riêng thực*** của A.

- *Trường hợp* ***A không có trị riêng thực nào*** *thì ta kết luận* ***A không chéo hóa được***.
- *Trường hợp* ***A có n trị riêng thực phân biệt*** thì ***A chéo hóa được***. *Ta làm tiếp bước 2.*
- *Trường hợp* A *có* k *trị riêng thực phân biệt* λ_i *với* λ_i là ***nghiệm bội*** n_i *của* $\left|A-\lambda I\right|=0$ *thì nếu:*

i) $n_1+n_2+\ldots+n_k<n \Rightarrow$ ***A không chéo hóa được***;

ii) $n_1+n_2+\ldots+n_k=n \Rightarrow$ ***A chéo hóa được***, ta làm *tiếp bước 2.*

Bước 2. Lập ma trận P có ***các cột là các vector cơ sở*** của $E(\lambda_i)$.

Khi đó, $P^{-1}AP = D$ *với* D *là ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo chính lần lượt là* λ_i *(mỗi* λ_i *xuất hiện liên tiếp* n_i *lần).*

VD 2. Ma trận C trong VD 7 (mục 3.4) có trị riêng bội hai là $\lambda = 2$. Do $\dim E(2) = 1 < 2$ nên C không chéo hóa được.

VD 3. Chéo hóa (nếu được) ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = 1 \end{array}\right. \Rightarrow A \text{ chéo hóa được.}$$

- $\lambda = -1$: $(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow u_1 = (0;\, 1)$.
- $\lambda = 1$: $(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = (1;\, 3)$.

Suy ra $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vậy $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

VD 4. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$. Tính A^{2011}.

Giải. Ta có:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = 3 \end{array}\right. \Rightarrow A \text{ chéo hóa được.}$$

- $\lambda = -1: (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = (0; 1)$.
- $\lambda = 3: (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = (1; 2)$.

Bài 4. Chéo hóa ma trận vuông

Ta có: $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = D.$

Vậy $A^{2011} = PD^{2011}P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3^{2011} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \ldots$$

VD 5. Chéo hóa ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Giải. Ta có:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -1 \\ -6 & -4-\lambda & 3 \\ -6 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -1 \\ 6 & 4+\lambda & -3 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 6 & 1+\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 2. \end{array}\right.$$

- Ứng với $\lambda = 2$ (nghiệm bội 2), ta có:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -6 & -6 & 3 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_2 = (1; 0; 2), u_3 = (0; 1; 2) \Rightarrow \dim E(2) = 2.$$

Do $\dim E(1) + \dim E(2) = 3$ nên A chéo hóa được.

Vậy $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, với $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.