ĐẠI SỐ
Chap 5: Dạng toàn phương

NỘI DUNG

5.1. Ánh xạ song tuyến tính - Dạng song tuyến tính

5.1.1 Định nghĩa: Cho E, F, L là các không gian vectơ trên trường số thực $\mathbb{R}$. Khi đó ánh xạ

$$\begin{aligned} f : E \times F &\to L \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

được gọi là ánh xạ song tuyến tính trên $E \times F$ nếu nó tuyến tính đối với mỗi biến, nghĩa là: $\forall x, x_1, x_2 \in E$, $\forall y, y_1, y_2 \in F$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

- $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$
- $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$
- $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$
- $f(x, \mu y) = \mu f(x, y)$.

Đặc biệt, nếu $L = \mathbb{R}$ ta có:

Định nghĩa 2: Cho E, F là các không gian vectơ trên $\mathbb{K}$ R. Ánh xạ song tuyến tính

$$f : E \times F \to \mathbb{R}$$

được gọi là dạng song tuyến tính trên $E \times F$.

Nếu $E = F, L = \mathbb{R}$, ta có:

Định nghĩa 3: Cho E là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Dạng song tuyến tính

$$f : E \times E \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

được gọi là một dạng song tuyến tính đối xứng trên E nếu

$$f(x, y) = f(y, x), \ \forall x, y \in E.$$

Nếu $E = F, L = \mathbb{R}$, ta có:

Định nghĩa 3: Cho E là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Dạng song tuyến tính

$$\begin{aligned} f : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

được gọi là một dạng song tuyến tính đối xứng trên E nếu

$$f(x, y) = f(y, x), \ \forall x, y \in E.$$

Ví dụ: Cho $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ được xác định như sau:

$$f(x, y) = \alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3$$

với mọi $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \ y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$. Chứng tỏ rằng f là một dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{R}^3$.

5.1.2 Ma trận của dạng song tuyến tính: Cho E, F là hai không gian vectơ hữu hạn chiều trên $\mathbb{K}$ với hệ $(e) = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ là cơ sở của E và hệ $(f) = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ là cơ sở của F. Giả sử

$$f : E \times F \to \mathbb{K}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

là dạng song tuyến tính.

5.1.2 Ma trận của dạng song tuyến tính: Cho E, F là hai không gian vectơ hữu hạn chiều trên $\mathbb{K}$ với hệ $(e) = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ là cơ sở của E và hệ $(f) = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ là cơ sở của F. Giả sử

$$f : E \times F \to \mathbb{K}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

là dạng song tuyến tính.

Khi đó với mỗi $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_m e_m \in E$ và $y = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_n f_n \in F$, ta có:

$$f(x, y) = f\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j f(e_i, f_j)$$

Đặt $f(e_i, f_j) = a_{ij},\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$. Ta có:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\beta_j.$$

Ma trận A cỡ $m \times n$ sau:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

được gọi là ma trận của dạng song tuyến tính f theo hai cơ sở $(e) = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ của E và $(f) = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ của F.

Dạng ma trận của dạng song tuyến tính là:

$$f(x, y) = X^T \cdot A \cdot Y$$

với X, Y lần lượt là ma trận cột biểu diễn tọa độ của x đối với (e) và của y đối với (f).

Dạng ma trận của dạng song tuyến tính là:

$$f(x, y) = X^T \cdot A \cdot Y$$

với X, Y lần lượt là ma trận cột biểu diễn tọa độ của x đối với (e) và của y đối với (f).

Với mỗi dạng song tuyến tính f ta chỉ có một và chỉ một ma trận đối với một cặp cơ sở cho trước của E và F, ngược lại một ma trận cho trước chỉ xác định được một dạng song tuyến tính.

Dạng ma trận của dạng song tuyến tính là:

$$f(x, y) = X^T \cdot A \cdot Y$$

với X, Y lần lượt là ma trận cột biểu diễn tọa độ của x đối với (e) và của y đối với (f).

Với mỗi dạng song tuyến tính f ta chỉ có một và chỉ một ma trận đối với một cặp cơ sở cho trước của E và F, ngược lại một ma trận cho trước chỉ xác định được một dạng song tuyến tính.

Gọi P là ma trận chuyển từ cơ sở cũ (e) sang cơ sở mới (e'), S là ma trận chuyển từ cơ sở cũ (f) sang cơ sở mới (f'). Khi đó ma trận của dạng song tuyến tính trong cặp cơ sở mới (e') và (f') là

$$A' = P^T AS.$$

Nhận xét: Xét f là dạng song tuyến tính đối xứng trên E. Khi đó

- Do $a_{ij} = f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i) = a_{ji}$ nên ma trận của dạng song tuyến tính đối xứng f là ma trận đối xứng.
- Gọi P là ma trận chuyển từ cơ sở cũ (e) sang cơ sở mới (e') của E thì ma trận của dạng song tuyến tính đối xứng f trong cơ sở mới (e') là:
$$A' = P^T AP.$$

Ví dụ: Cho $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ là dạng song tuyến tính xác định bởi

$$f(x,y) = \alpha_1\beta_1 + 2\alpha_1\beta_2 + \alpha_1\beta_3 + 2\alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2$$

với mọi $x/(e) = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2,\ y/(f) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ trong đó $(e) = \{e_1, e_2\}$, $(f) = \{f_1, f_2, f_3\}$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$.

a. Tìm ma trận của f theo cặp cơ sở (e) và (f).

b. Viết $f(x,y)$ dưới dạng ma trận.

c. Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở (e') và (f') với

$$(e') = \{e'_1 = e_1 + e_2, e'_2 = 2e_1 + e_2\}$$

và

$$(f') = \{f'_1 = f_1 + f_2 + f_3,\ f'_2 = 2f_2 + f_3,\ f'_3 = 2f_3\}.$$

Giải:
a. Gọi A là ma trận của f theo cặp cơ sở (e) và (f). Khi đó

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Với mọi $x/(e) = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2,\ y/(f) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ thì dạng ma trận của dạng song tuyến tính đã cho là :

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = xAy^T$$

c. Gọi A' là ma trận của f đối với cặp cơ sở (e') và (f'). Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ (e) sang (e') và S là ma trận chuyển cơ sở từ (f) sang (f'). Khi đó

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Từ đó, $A' = P^T AS = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 2 \\ 11 & 12 & 4 \end{bmatrix}$

5.2. Dạng toàn phương

5.2.1 Định nghĩa 1: Cho E là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ và f là dạng song tuyến tính đối xứng trên E:

$$f : E \times E \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y).$$

Ánh xạ

$$\omega : E \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \omega(x) = f(x, x)$$

được gọi là một dạng toàn phương trên E.

Nếu E là không gian vectơ n chiều trên $\mathbb{R}$ và $(e) = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một cơ sở của E thì $\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ \alpha_i \in \mathbb{K},\ i = \overline{1, n}$, ta có

$$\begin{aligned}\omega(x) = f(x, x) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j \\ &= a_{11}\alpha_1^2 + a_{22}\alpha_2^2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j,\end{aligned}$$

trong đó $f(e_i, e_j) = a_{ij} = a_{ji} = f(e_j, e_i),\ \forall i, j = \overline{1, n}$.

Tóm lại, ánh xạ

$$\omega: \quad E \to \mathbb{R}$$
$$x/(e) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mapsto \omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j,$$

trong đó $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = \overline{1, n}$ và (e) là một cơ sở của E, được gọi là một dạng toàn phương trên không gian vectơ E trên $\mathbb{R}$.

Vì $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = \overline{1, n}$ nên ma trận của dạng toàn phương là ma trận đối xứng cấp n.

Dạng ma trận của dạng toàn phương là: $\omega(x) = X^T AX$ với X là ma trận cột biểu diễn tọa độ của x đối với cơ sở (e). Không tồn tại ma trận đối xứng B khác A sao cho $X^T BX = \omega(x)$.

Ví dụ 1: Dạng toàn phương tương ứng với dạng song tuyến tính đối xứng $f(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - 5x_2y_2 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2 + x_3y_3$ là:

$$\begin{aligned}\omega(x) &= x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 5x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2 \\ &= x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3\end{aligned}$$

Ma trận của dạng toàn phương ω là $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Dạng toàn phương ω này viết dưới dạng ma trận là:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 2: Hạng của dạng toàn phương là hạng của ma trận của dạng toàn phương ấy theo một cơ sở nào đó.

Gọi P là ma trận chuyển từ cơ sở cũ (e) sang cơ sở mới (e') của E thì ma trận của dạng toàn phương ω trong cơ sở mới (e') là:

$$A' = P^T AP.$$

Định lý 2: Hạng của dạng toàn phương không phụ thuộc vào cơ sở đã chọn, tức là

$$r(A') = r(A).$$

Ví dụ 2: Tìm hạng của dạng toàn phương sau:

$$\omega(x) = 3x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

Ví dụ 2: Tìm hạng của dạng toàn phương sau:

$$\omega(x) = 3x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

Giải: Ma trận của dạng toàn phương ω là $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

$$A \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_3 \to h_3 + 4h_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 \to h_3 - 4h_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

Vì $\mathrm{r}(A) = 3$ nên hạng của dạng toàn phương đã cho là 3.

5.2.2 Biến đổi dạng toàn phương về dạng chính tắc:

a. Định nghĩa Nếu đối với một cơ sở (e') nào đó của không gian vectơ E trên $\mathbb{R}$, dạng toàn phương ω được biểu diễn dưới dạng

$$\omega(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \tag{1}$$

trong đó $\lambda_i \in \mathbb{K},\ i = \overline{1, n}$ và $x/(e') = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ thì dạng (1) được gọi là dạng chính tắc của dạng toàn phương ω. Ma trận của dạng toàn phương ω lúc này có dạng chéo.

b. Phương pháp Lagrange: Nhóm các số hạng lại với nhau để đưa dạng toàn phương ω đã cho về dạng hằng đẳng thức $(a \pm b)^2$ và nhóm cho đến khi nào được tổng của tất cả các bình phương thì ta dừng lại. Trong trường hợp tất cả các a_{ii} đều bằng 0 thì ta áp dụng phép biến đổi tọa độ sau:

$$\begin{cases} \alpha_i = \beta_i - \beta_j \\ \alpha_j = \beta_i + \beta_j \\ \alpha_k = \beta_k, \forall k \neq i, j. \end{cases}$$

Bước 1 Nhóm các số hạng thành tổng các bình phương đúng.

Bước 2 Thực hiện phép biến đổi về dạng chính tắc.

Bước 3 Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cũ sang mới bằng cách biểu diễn tọa độ cũ của x thông qua tọa độ mới của nó. Từ đó tìm cơ sở mới tương ứng.

Ví dụ 1 Cho dạng toàn phương

$$\omega(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

đối với cơ sở $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ của không gian vectơ E trên $\mathbb{R}$.

a. Dùng phương pháp Lagrange để đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc.

b. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ (e) sang cơ sở (e') để đối với (e') dạng toàn phương đã cho có dạng chính tắc.

Ví dụ 1 Cho dạng toàn phương

$$\omega(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

đối với cơ sở $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ của không gian vectơ E trên $\mathbb{R}$.

a. Dùng phương pháp Lagrange để đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc.

b. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ (e) sang cơ sở (e') để đối với (e') dạng toàn phương đã cho có dạng chính tắc.

Giải: a. Ta có: $\omega(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_3^2$

$$\begin{aligned}
\omega(x) &= x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) + (x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + [(2x_2)^2 + 2(2x_2)x_3 + x_3^2] - 9x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (2x_2 + x_3)^2 - 9x_3^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega(x) &= x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) + (x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + [(2x_2)^2 + 2(2x_2)x_3 + x_3^2] - 9x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (2x_2 + x_3)^2 - 9x_3^2
\end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = y_1 \\ 2x_2 + x_3 & = y_2 \\ x_3 & = y_3 \end{cases} \tag{2}$$

Khi đó tồn tại cơ sở $(e') = \{e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}\}$ của E sao cho $\omega(x) = y_1^2 + y_2^2 - 9y_3^2$ trong đó $(x)/(e') = (y_1, y_2, y_3)$ là dạng chính tắc của dạng toàn phương đã cho.

b. Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{2}y_3 \\ x_2 &= \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 &= y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

b. Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{2}y_3 \\ x_2 &= \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 &= y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Theo công thức đổi tọa độ, $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P$ là ma trận chuyển cơ sở từ (e) sang (e'). Vì cột thứ j của P là tọa độ của e_j' đối với (e) nên $(e') = \left\{e_1' = (1, 0, 0); e_2' = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), e_3' = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1)\right\}$.

Ví dụ 2 Cho dạng toàn phương

$$\omega(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

đối với cơ sở $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ của không gian vectơ E trên $\mathbb{R}$.

a. Dùng phương pháp Lagrange để đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc.

b. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ (e) sang cơ sở (e') để đối với (e') dạng toàn phương đã cho có dạng chính tắc.

Giải: a. Nhận thấy $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$

Giải: a. Nhận thấy $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ nên ta áp dụng phép biến đổi tọa độ sau:

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 - y_2 \\ x_2 &= y_1 + y_2 \\ x_3 &= y_3 \end{cases} \tag{3}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \omega(x) &= y_1^2 - y_2^2 + (y_1 + y_2)y_3 + y_3(y_1 - y_2) \\ &= y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 + y_2y_3 + y_3y_1 - y_3y_2 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 \\ &= y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2 - y_3^2 - y_2^2 \\ &= (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2 \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{cases} y_1 + y_3 & = z_1 \\ y_2 & = z_2 \\ y_3 & = z_3 \end{cases} \tag{4}$$

Khi đó tồn tại cơ sở $(e') = \{e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}\}$ của E sao cho với $(x)/(e') = (z_1, z_2, z_3)$ ta có $\omega(x) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$ là dạng chính tắc của dạng toàn phương đã cho.

b. Từ (4) ta có $\begin{cases} y_1 &= z_1 - z_3 \\ y_2 &= z_2 \\ y_3 &= z_3 \end{cases}$. Thay vào (3), ta được

$$\begin{cases} x_1 &= z_1 - z_2 - z_3 \\ x_2 &= z_1 + z_2 - z_3 \\ x_3 &= z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

b. Từ (4) ta có $\begin{cases} y_1 &= z_1 - z_3 \\ y_2 &= z_2 \\ y_3 &= z_3 \end{cases}$. Thay vào (3), ta được

$$\begin{cases} x_1 &= z_1 - z_2 - z_3 \\ x_2 &= z_1 + z_2 - z_3 \\ x_3 &= z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Theo công thức đổi tọa độ, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P$ là ma trận chuyển cơ sở từ (e) sang (e'). Vì cột thứ j của P là tọa độ của $e_j^{'}$ đối với (e) nên

$$(e') = \{e_1^{'} = (1, 1, 0); e_2^{'} = (-1, 1, 0), e_3^{'} = (-1, -1, 1)\}.$$

c. Phương pháp Jacobi: Gọi $A = (a_{ij})_n$ là ma trận của dạng toàn phương ω đối với cơ sở (e).

Bước 1 Tính các định thức con chính

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

tạo thành từ k dòng và k cột đầu của A với mọi $k = \overline{1, n}$.

Nếu có một định thức con chính bằng 0 thì phương pháp Jacobi không được áp dụng.

Nếu mọi định thức con chính đều khác 0 thì ta chuyển sang bước 2.

Bước 2 Tồn tại một cơ sở mới $(e') = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ sao cho

$$\omega(x) = \frac{1}{D_1} y_1^2 + \frac{D_1}{D_2} y_2^2 + \cdots + \frac{D_{n-1}}{D_n} y_n^2$$

trong đó $x/(e') = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Bước 2 Tồn tại một cơ sở mới $(e') = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ sao cho

$$\omega(x) = \frac{1}{D_1}y_1^2 + \frac{D_1}{D_2}y_2^2 + \cdots + \frac{D_{n-1}}{D_n}y_n^2$$

trong đó $x/(e') = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Bước 3 Cơ sở mới (e') xác định bởi

$$\begin{cases} e'_1 & = b_{11}e_1 \\ e'_2 & = b_{21}e_1 + b_{22}e_2 \\ \ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ e'_n & = b_{n1}e_1 + b_{n2}e_2 + \ldots + b_{nn}e_n. \end{cases} \tag{5}$$

trong đó

- b_{11} thỏa mãn $a_{11}b_{11} = 1$.

trong đó

- b_{11} thỏa mãn $a_{11}b_{11} = 1$.
- b_{21}, b_{22} là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} = 0 \\ a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} = 1 \end{cases}$$

trong đó

- b_{11} thỏa mãn $a_{11}b_{11} = 1$.
- b_{21}, b_{22} là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} = 0 \\ a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} = 1 \end{cases}$$

- b_{31}, b_{32}, b_{33} là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}b_{31} + a_{12}b_{32} + a_{13}b_{33} & = 0 \\ a_{21}b_{31} + a_{22}b_{32} + a_{23}b_{33} & = 0 \\ a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33} & = 1 \end{cases}$$

- ....

- $b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{ii}$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}b_{i1} + a_{12}b_{i2} + \ldots + a_{1i}b_{ii} & = 0 \\ a_{21}b_{i1} + a_{22}b_{i2} + \ldots + a_{2i}b_{ii} & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{i1}b_{i1} + a_{i2}b_{i2} + \ldots + a_{ii}b_{ii} & = 1 \end{cases}$$

- $b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{ii}$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}b_{i1} + a_{12}b_{i2} + \ldots + a_{1i}b_{ii} & = 0 \\ a_{21}b_{i1} + a_{22}b_{i2} + \ldots + a_{2i}b_{ii} & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{i1}b_{i1} + a_{i2}b_{i2} + \ldots + a_{ii}b_{ii} & = 1 \end{cases}$$

- ....
- $b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{nn}$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}b_{n1} + a_{12}b_{n2} + \ldots + a_{1n}b_{nn} & = 0 \\ a_{21}b_{n1} + a_{22}b_{n2} + \ldots + a_{2n}b_{nn} & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1}b_{n1} + a_{n2}b_{n2} + \ldots + a_{nn}b_{nn} & = 1 \end{cases}$$

Ví dụ 1 Cho dạng toàn phương ba biến thực sau:

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2.$$

đối với cơ sở $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ trên $\mathbb{R}$.

a. Dùng phương pháp Jacobi để đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc.

b. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ (e) sang cơ sở (e') để đối với (e') dạng toàn phương đã cho có dạng chính tắc.

Giải : a. Ma trận của dạng toàn phương ω là $A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Vì $D_1 = 2 \neq 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \neq 0,\ D_3 = \det(A) = -\frac{17}{4} \neq 0$ nên tồn tại cơ sở $(e') = \{e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}\}$ của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ sao cho với $[x]/(e') = (y_1, y_2, y_3)$ ta có:

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \frac{1}{D_1}y_1^2 + \frac{D_1}{D_2}y_2^2 + \frac{D_2}{D_3}y_3^2 \\ &= \frac{1}{2}y_1^2 - 8y_2^2 + \frac{1}{17}y_3^2 \end{aligned}$$

là dạng chính tắc của dạng toàn phương đã cho.

b. Cơ sở (e') xác định bởi $\begin{cases} e'_1 &= b_{11}e_1 \\ e'_2 &= b_{21}e_1 + b_{22}e_2 \\ e'_3 &= b_{31}e_1 + b_{32}e_2 + b_{33}e_3 \end{cases}$ trong đó

- $b_{11} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{2}$
- b_{21}, b_{22} là nghiệm của hệ phương trình sau:
$\begin{cases} 2b_{21} + \frac{3}{2}b_{22} &= 0 \\ \frac{3}{2}b_{21} + b_{22} &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{21} &= 6 \\ b_{22} &= -8 \end{cases}$
- b_{31}, b_{32}, b_{33} là nghiệm của hệ phương trình sau:
$\begin{cases} 2b_{31} + \frac{3}{2}b_{32} + 2b_{33} &= 0 \\ \frac{3}{2}b_{31} + b_{32} &= 0 \\ 2b_{31} + b_{33} &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{31} &= 8/17 \\ b_{32} &= -12/17 \\ b_{33} &= 1/17 \end{cases}$

Vậy $(e') = \left\{e'_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0); e'_2 = (6, -8, 0), e'_3 = (\frac{8}{17}, -\frac{12}{17}, \frac{1}{17})\right\}$.

Ví dụ 2 Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc

$$\omega(x) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$$

Giải : Ma trận của dạng toàn phương ω là $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$.

Vì $D_1 = 2 \neq 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,\ D_3 = \det(A) = 0$ nên ta không áp dụng được phương pháp Jacobi. Sử dụng phương pháp Lagrange, ta được

$$\omega(x) = 2(x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2$$

Đặt $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = y_1 \\ x_2 - x_3 & = y_2 \\ x_3 & = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = y_1 - 2y_2 - y_3 \\ x_2 & = y_2 + y_3 \\ x_3 & = y_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Theo công thức đổi tọa độ, $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P$ là ma trận chuyển cơ sở từ (e) sang (e'). Vì cột thứ j của P là tọa độ của $e_j^{'}$ đối với (e) nên $(e') = \left\{e_1^{'} = (1, 0, 0); e_2^{'} = (-2, 1, 0), e_3^{'} = (1, 1, 1)\right\}$. Vậy dạng chính tắc của dạng toàn phương đã cho trong cơ sở (e') là:

$$\omega(x) = 2y_1^2 + y_2^2 + 0y_3^2.$$

5.2.3 Dạng chuẩn tắc của dạng toàn phương:

a. Định nghĩa Nếu đối với một cơ sở (e') nào đó của không gian vectơ E trên $\mathbb{R}$ dạng toàn phương ω được biểu diễn dưới dạng

$$\omega(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \tag{6}$$

trong đó λ_i chỉ nhận các giá trị ± 1 hoặc 0 thì (6) được gọi là dạng chuẩn tắc của dạng toàn phương ω.

b. Biến đổi dạng toàn phương về dạng chuẩn tắc

Bước 1 Biến đổi dạng toàn phương về dạng chính tắc

$$\omega(x) = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

b. Biến đổi dạng toàn phương về dạng chuẩn tắc

Bước 1 Biến đổi dạng toàn phương về dạng chính tắc

$$\omega(x) = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

Bước 2 Đặt

$$z_i = \begin{cases} \sqrt{k_i} y_i & \text{nếu } k_i > 0 \\ \sqrt{-k_i} y_i & \text{nếu } k_i < 0 \text{ , } i = \overline{1, n} \\ y_i & \text{nếu } k_i = 0 \end{cases}$$

ta đưa được ω về dạng chuẩn tắc.

Ví dụ Biến đổi dạng toàn phương sau về dạng chuẩn tắc:

$$q(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2$$

Ví dụ Biến đổi dạng toàn phương sau về dạng chuẩn tắc:

$$q(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2$$

Giải: Ta có: $q(x) = (\sqrt{2}x_1)^2 - (\sqrt{3}x_2)^2 - x_3^2$. Đặt

$$\begin{cases} \sqrt{2}x_1 & = y_1 \\ \sqrt{3}x_2 & = y_2 \\ x_3 & = y_3 \end{cases} \tag{7}$$

Khi đó tồn tại cơ sở $(e') = \{e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}\}$ sao cho $q(x) = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, trong đó $(x)/(e') = (y_1, y_2, y_3)$, là dạng chuẩn tắc của dạng toàn phương đã cho.

Hệ pt (7) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

Theo công thức đổi tọa độ, $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P$ là ma trận chuyển cơ sở từ (e) sang (e'). Vì cột thứ j của P là tọa độ của e_j' đối với (e) nên

$$(e') = \{e_1' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0); e_2' = (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0), e_3' = (0, 0, 1)\}.$$

5.2.4 Dấu của dạng toàn phương: Dạng toàn phương có thể hiểu là một hàm số từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$. Cụ thể, nếu $q(x) = x^T Ax$, trong đó A là ma trận đối xứng cấp n thì ta có thể xác định một hàm thực trên $\mathbb{R}^n$ như sau:

$$y = q(x) = x^T Ax$$

Dạng toàn phương được gọi là

- Xác định dương nếu $q(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n, x \neq O_{\mathbb{R}^n}$
- Nửa xác định dương nếu $q(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n, x \neq O_{\mathbb{R}^n}$
- Xác định âm nếu $q(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n, x \neq O_{\mathbb{R}^n}$
- Nửa xác định âm nếu $q(x) \leqslant 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n, x \neq O_{\mathbb{R}^n}$
- Không xác định nếu $q(x)$ nhận cả giá trị âm lẫn dương.

Định lý 1 Cho A là ma trận đối xứng cấp n của dạng toàn phương $\omega(x)$ trên không gian vectơ E trên $\mathbb{R}$. Khi đó

- Điều kiện cần và đủ để $\omega(x)$ xác định dương nếu tồn tại một cơ sở trên E sao cho mọi định thức con chính của ma trận của ω trong cơ sở này đều dương.
- Điều kiện cần và đủ để $\omega(x)$ xác định âm nếu tồn tại một cơ sở trên E sao cho các định thức con chính của ma trận của ω trong cơ sở này thỏa mãn $(-1)^k D_k > 0,\ k = \overline{1, n}$.

Định lý 2 Cho $q(x)$ là dạng toàn phương với $q(x) = x^T Ax$, trong đó A là ma trận đối xứng cấp n. Giả sử A có các giá trị riêng là $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Khi đó dạng toàn phương là

- Xác định dương nếu và chỉ nếu $\lambda_i > 0, \forall i = \overline{1, n}$
- Nửa xác định dương nếu và chỉ nếu $\lambda_i \geqslant 0, \forall i = \overline{1, n}$
- Xác định âm nếu và chỉ nếu $\lambda_i < 0, \forall i = \overline{1, n}$
- Nửa xác định âm nếu và chỉ nếu $\lambda_i \leqslant 0, \forall i = \overline{1, n}$
- Không xác định nếu và chỉ nếu A có cả giá trị riêng âm lẫn dương.

Định lý 3 (Luật quán tính của J.J. Sylvester) Số các số hạng có hệ số dương và số các số hạng có hệ số âm trong dạng chính tắc hay dạng chuẩn tắc của dạng toàn phương ω là không thay đổi khi ta thay đổi cơ sở.

Định lý 3 (Luật quán tính của J.J. Sylvester) Số các số hạng có hệ số dương và số các số hạng có hệ số âm trong dạng chính tắc hay dạng chuẩn tắc của dạng toàn phương ω là không thay đổi khi ta thay đổi cơ sở.

Định nghĩa Ký số của một dạng toàn phương là hiệu số giữa số các hệ số dương và số các hệ số âm của dạng chính tắc của nó.

Định lý 3 (Luật quán tính của J.J. Sylvester) Số các số hạng có hệ số dương và số các số hạng có hệ số âm trong dạng chính tắc hay dạng chuẩn tắc của dạng toàn phương ω là không thay đổi khi ta thay đổi cơ sở.

Định nghĩa Ký số của một dạng toàn phương là hiệu số giữa số các hệ số dương và số các hệ số âm của dạng chính tắc của nó.

Chú ý Một cách khác để xác định ký số của một dạng toàn phương đã cho là ta tìm hiệu số giữa số các giá trị riêng dương và số các giá trị riêng âm của ma trận của nó.

Ví dụ Tìm ký số và xét dấu của dạng toàn phương sau trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$:

$$\omega(x) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3.$$

Ví dụ Tìm ký số và xét dấu của dạng toàn phương sau trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$:

$$\omega(x) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3.$$

Giải: Theo ví dụ trên (mục Phương pháp Jacobi), ta có dạng chính tắc của dạng toàn phương đã cho trong cơ sở $(e') = \{e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}\}$ với $e_1^{'} = (1, 0, 0)$; $e_2^{'} = (-2, 1, 0)$, $e_3^{'} = (1, 1, 1)$ là:

$$\omega(x) = 2y_1^2 + y_2^2 + 0y_3^2.$$

Suy ra

- $\omega(x) \geqslant 0, \forall x \neq (0, 0, 0)$. Do đó, $\omega(x)$ là dạng toàn phương nửa xác định dương.
- Dạng chính tắc của ω có 2 hệ số dương và 0 hệ số âm nên ký số của nó là $2 - 0 = 2$.

Ví dụ 2 Xét dấu của dạng toàn phương sau:

$$\omega(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Ví dụ 2 Xét dấu của dạng toàn phương sau:

$$\omega(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Giải: Ma trận A của dạng toàn phương là: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Kiểm tra dấu của tất cả các định thức con chính.

Ví dụ 2 Xét dấu của dạng toàn phương sau:

$$\omega(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Giải: Ma trận A của dạng toàn phương là: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Kiểm tra dấu của tất cả các định thức con chính.

Ta có $\det[2] = 2$, $\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3$, $\det(A) = 3$.

Ví dụ 2 Xét dấu của dạng toàn phương sau:

$$\omega(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Giải: Ma trận A của dạng toàn phương là: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Kiểm tra dấu của tất cả các định thức con chính.

Ta có $\det[2] = 2$, $\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3$, $\det(A) = 3$.

$\Rightarrow$ Mọi định thức con chính của A đều có dấu dương.

Vậy dạng toàn phương đã cho xác định dương.

Ví dụ 3 Tìm ký số và xét dấu của dạng toàn phương sau trên không gian vectơ $\mathbb{R}^3$:

$$\omega(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Ví dụ 3 Tìm ký số và xét dấu của dạng toàn phương sau trên không gian vectơ $\mathbb{R}^3$:

$$\omega(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Giải: Ma trận A của dạng toàn phương là: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Vì $\det(A - \lambda I) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = (\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda + 2)$ nên A có 3 giá trị riêng: 3, 6, -2.

Vậy dạng toàn phương đã cho không xác định và ký số của nó là $2 - 1 = 1$.

Ví dụ 3 Tìm ký số và xét dấu của dạng toàn phương sau trên không gian vectơ $\mathbb{R}^3$:

$$\omega(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Giải: Ma trận A của dạng toàn phương là: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Vì $\det(A - \lambda I) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = (\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda + 2)$ nên A có 3 giá trị riêng: $3,\ 6,\ -2$.

Vậy dạng toàn phương đã cho không xác định và ký số của nó là $2 - 1 = 1$.

Bài tập 1 Sử dụng phương pháp Lagrange đưa các dạng toàn phương sau đối với cơ sở $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ của $\mathbb{R}$-không gian vectơ E về dạng chính tắc, chuẩn tắc từ đó tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở đã cho (e) sang cơ sở (e') để đối với (e') dạng toàn phương đã cho có dạng chính tắc, chuẩn tắc đó.

a. $q(x) = 4\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 9\alpha_3^2 - 12\alpha_1\alpha_3$.

b. $\omega(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

c. $\varphi(x) = x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Bài tập 2 Hỏi có thể sử dụng phương pháp Jacobi để đưa các dạng toàn phương ở bài tập 1 về dạng chính tắc không? Vì sao?

Bài tập 3 Đưa dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ sau về dạng chuẩn tắc:
a. $\omega(x) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3$.
b. $\omega(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_3$.
c. $\omega(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.
c. $\omega(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Bài tập 4 Tìm hạng, ký số và xét dấu của các dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ sau bằng cách sử dụng giá trị riêng:
a. $q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.
b. $q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Bài tập 5 Cho dạng toàn phương

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2mx_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Hãy tìm m để dạng toàn phương đã cho xác định dương.