NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (Chủ biên)
TẠ VĂN ĐĨNH - NGUYỄN HỒ QUỲNH

TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP BA

PHÉP TÍNH GIẢI TÍCH NHIỀU BIẾN SỐ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (chủ biên)
TẠ VĂN ĐĨNH - NGUYỄN HỒ QUỲNH

TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP BA

PHÉP TÍNH GIẢI TÍCH NHIỀU BIẾN SỐ

(*Tái bản lần thứ chín*)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chương I

HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

1.1. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1.1.1. Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Xét không gian Euclide n chiều $\mathbf{R}^n$ ($n > 1$). Một phần tử $x \in \mathbf{R}^n$ là một bộ n số thực $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. D là một tập hợp trong $\mathbf{R}^n$. Người ta gọi ánh xạ

$$f : D \to \mathbf{R}$$

xác định bởi

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \mapsto u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}$$

là một *hàm số của n biến số* xác định trên D ; D được gọi là *miền xác định* của hàm số f ; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là các *biến số độc lập*. Nếu xem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các tọa độ của một điểm $M \in \mathbf{R}^n$ trong một hệ tọa độ nào đó thì cũng có thể viết $u = f(M)$.

Trong trường hợp thường gặp $n = 2$ hay $n = 3$, người ta dùng kí hiệu $z = f(x, y)$ hay $u = f(x, y, z)$.

Trong giáo trình này ta sẽ chỉ xét những hệ tọa độ Đêcac vuông góc.

1.1.2. Tập hợp trong $\mathbf{R}^n$

• Giả sử $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $N(y_1, y_2, \ldots y_n)$ là hai điểm trong $\mathbf{R}^n$. Khoảng cách giữa hai điểm ấy, kí hiệu là $d(M, N)$, được cho bởi công thức

$$d(M, N) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

Có thể chứng minh được rằng với ba điểm A, B, C bất kì trong $\mathbf{R}^n$, ta có

$d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C)$ (bất đẳng thức tam giác)

• M_o là một điểm thuộc $\mathbf{R}^n$. Người ta gọi ε – *lân cận* của M_o là tập hợp tất cả những điểm M của $\mathbf{R}^n$ sao cho $d(M_o,M) < \varepsilon$. Người ta gọi *lân cận* của M_o là mọi tập hợp chứa một ε – lân cận nào đó của M_o.

• E là một tập hợp trong $\mathbf{R}^n$. Điểm $M \in E$ được gọi là *điểm trong* của E nếu tồn tại một ε – lân cận nào đó của M nằm hoàn toàn trong E. Tập hợp E được gọi là *mở* nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong.

• Điểm $N \in \mathbf{R}^n$ được gọi là *điểm biên* của tập hợp E nếu mọi ε – lân cận của N đều vừa chứa những điểm thuộc E, vừa chứa những điểm không thuộc E. Điểm biên của tập hợp E có thể thuộc E, cũng có thể không thuộc E. Tập hợp tất cả những điểm biên của E được gọi là *biên* của nó.

• Tập hợp E được gọi là *đóng* nếu nó chứa mọi điểm biên của nó (tức là biên của E là một bộ phận của E).

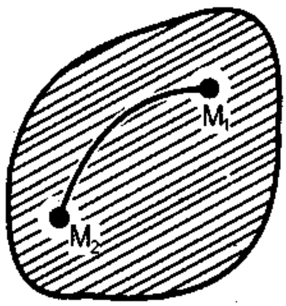
Ví dụ : Tập hợp tất cả những điểm M sao cho $d(M_o, M) < r$, trong đó M_o là một điểm cố định, r là một số dương, là một tập hợp mở. Thật vậy, gọi E là tập hợp ấy. Giả sử M là một điểm bất kì của E, ta có $d(M_o,M) < r$. Đặt $\varepsilon = r - d(M_o, M)$. ε – lân cận của M nằm hoàn toàn trong E vì nếu P là một điểm của lân cận ấy thì ta có $d(M, P) < \varepsilon$, do đó theo bất đẳng thức tam giác

$$d(M_o,P) \leqslant d(M_o,M) + d(M,P) < d(M_o,M) + \varepsilon = r. \blacksquare$$

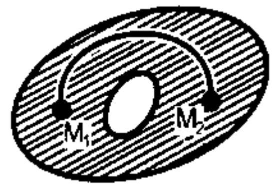
Tập hợp E ấy được gọi là *quả cầu mở* tâm M_o, bán kính r. Biên của tập hợp ấy gồm những điểm M sao cho $d(M_o,M) = r$, được gọi là *mặt cầu* tâm M_o bán kính r. Tập hợp những điểm M sao cho $d(M_o,M) \leqslant r$ là một tập hợp đóng được gọi là *quả cầu đóng* tâm M_o bán kính r.

● Tập hợp E được gọi là *bị chặn* nếu tồn tại một quả cầu nào đó chứa nó.

● Tập hợp E được gọi là *liên thông* nếu có thể nối hai điểm bất kì M_1, M_2 của E bởi một đường liên tục nằm hoàn toàn trong E ; tập hợp liên thông được gọi là *đơn liên* nếu nó bị giới hạn bởi một mặt kín (hình 1.1a), là *đa liên* nếu nó bị giới hạn bởi nhiều mặt kín rời nhau từng đôi một (hình 1.1b).



Hình 1.1a



Hình 1.1b

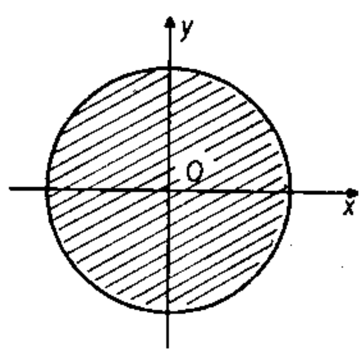
1.1.3. Miền xác định của hàm số nhiều biến số

Ta quy ước rằng nếu hàm số u được cho bởi biểu thức $u = f(M)$ mà không nói gì thêm về miền xác định của nó thì miền xác định của u được hiểu là tập hợp tất cả những điểm M sao cho biểu thức $f(M)$ có nghĩa, thường đó là một tập hợp liên thông.

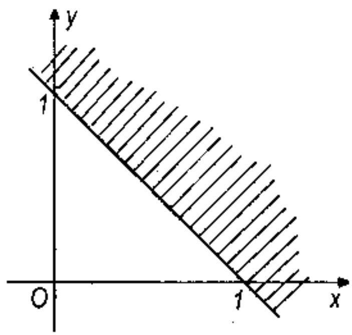
Ví dụ 1 : Hàm số $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ được xác định trong miền $x^2 + y^2 \leq 1$, tức là trong quả cầu đóng tâm O bán kính 1 (hình 1.2).

Ví dụ 2 : Miền xác định của hàm số $z = \ln(x + y - 1)$ là miền $x + y > 1$ (hình 1.3).

Ví dụ 3 : Hàm số $u = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$ được xác định khi $x^2 + y^2 + z^2 < 1$,



Hình 1.2



Hình 1.3

miền xác định của nó là quả cầu mở tâm O bán kính 1.

Sau này các khái niệm sẽ được trình bầy chi tiết cho trường hợp $n = 2$ hay $n = 3$; các khái niệm ấy cũng được mở rộng cho trường hợp n nguyên dương bất kì.

1.1.4. Giới hạn của hàm số nhiều biến số

• Ta nói rằng dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ dần tới điểm $M_o(x_o, y_o)$ trong $\mathbf{R}^2$ và viết $M_n \to M_o$ khi $n \to \infty$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(M_o, M_n) = 0$ hay nếu

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_o$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_o$.

• Giả sử hàm số $z = f(M) = f(x,y)$ xác định trong một lân cận V nào đó của điểm $M_o(x_o, y_o)$, có thể trừ tại M_o. Ta nói rằng hàm số f(M) có *giới hạn l* khi M(x,y) dần đến M_o nếu với mọi dãy điểm $M_n(x_n,y_n)$ (khác M_o) thuộc lân cận V dần đến M_o ta đều có

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = l .$$

Khi đó ta viết

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x, y) = l \quad \text{hay} \quad \lim_{M\to M_o} f(M) = l.$$

Cũng như khi xét giới hạn của hàm số một biến số, có thể chứng minh rằng định nghĩa trên tương đương với định nghĩa sau : Hàm số f(M) có giới hạn l khi M dần đến M_o nếu $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ sao cho

$$d(M_o,M) < \delta \Rightarrow |f(M) - l| < \varepsilon.$$

• Khái niệm giới hạn vô hạn cũng được định nghĩa tương tự như đối với hàm số một biến số. Chẳng hạn

$$\frac{1}{x^2+y^2} \to +\infty \qquad \text{khi } (x,y) \to (0,0).$$

• Các định lí về giới hạn của tổng, tích, thương đối với hàm số một biến số cũng đúng cho hàm số nhiều biến số và được chứng minh tương tự.

Ví dụ 1 : Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, với $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Hàm số f(x,y) xác định trên $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Nếu cho $(x,y) \to (0,0)$ theo phương của đường thẳng $y = kx$, ta có

$$f(x, kx) = \frac{k}{1+k^2} \text{ khi } x \neq 0 .$$

Do đó

$$\lim_{x\to 0} f(x, kx) = \frac{k}{1+k^2} .$$

Vậy khi $(x,y) \to (0,0)$ theo những phương khác nhau, f(x,y) dần tới những giới hạn khác nhau. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Ví dụ 2 : Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$, với $g(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Hàm số g(x,y) xác định trên $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vì $\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$ nên

$$|g(x,y)| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} |y| \leq |y| .$$

Vậy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 .$$

Ví dụ 3 : Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x, y)$, với $h(x, y) = \dfrac{xy^3}{2x^2 + 3y^6}$.

Hàm số h(x, y) xác định trên $\mathbf{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$. Nếu cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo phương của đường thẳng $y = kx$, ta có

$$h(x, kx) = \frac{k^3x^2}{2 + 3k^6x^4}, \ \forall x \neq 0.$$

Do đó $h(x, y) \to 0$ khi $(x, y) \to (0, 0)$ theo mọi phương $y = kx$. Nhưng điều đó không có nghĩa là giới hạn phải tìm tồn tại và bằng 0. Thật vậy, nếu cho $(x, y) \to (0, 0)$ trên đường $x = y^3$, ta có

$$h(y^3, y) = \frac{y^6}{5y^6} = \frac{1}{5}.$$

Do đó $h(x, y) \to \dfrac{1}{5}$ khi $(x, y) \to (0, 0)$ dọc theo đường parabôn bậc ba $x = y^3$.

1.1.5. Tính liên tục của hàm số nhiều biến số

- Giả sử hàm số f(M) xác định trong miền D, M_o là một điểm thuộc D. Ta nói rằng hàm số f(M) liên tục tại M_o nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{M\to M_o} f(M) = f(M_o).$$

Nếu miền D đóng, M_o là một điểm biên của D thì $\lim\limits_{M\to M_o} f(M)$ được hiểu là giới hạn của f(M) khi M dần đến M_o ở bên trong của D.

Giả sử M_o có tọa độ là (x_o, y_o), M có tọa độ là $(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$. Đặt $\Delta f = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o)$. Định nghĩa trên có thể phát biểu như sau : Hàm số f(x, y) được gọi là liên tục tại (x_o, y_o) nếu nó xác định tại đó và nếu $\Delta f \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Hàm số f(M) được gọi là liên tục trong miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

- Hàm số f(M) được gọi là liên tục đều trên miền D nếu $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ sao cho với mọi cặp điểm M', M'' thuộc D mà $d(M', M'') < \delta$ ta đều có

$$|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$$

- Hàm số nhiều biến số liên tục cũng có những tính chất như hàm số một biến số liên tục. Chẳng hạn, nếu hàm số nhiều biến số liên tục trong một miền đóng, bị chặn thì nó bị chặn trong miền ấy, nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của nó trong miền ấy, nó liên tục đều trong miền ấy.

Ví dụ 4 : Khảo sát tính liên tục của hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^{\alpha}}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

trong đó α là một hằng số dương.

f(x,y) liên tục $\forall(x,y) \neq (0,0)$ vì là thương của hai hàm số liên tục mà mẫu số khác không. Vậy chỉ cần xét tại điểm (0,0). Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \Rightarrow |f(x, y)| \leq \frac{1}{2^{\alpha}}(x^2 + y^2)^{\alpha - 1}.$$

Do đó nếu $\alpha > 1$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$, vậy f(x,y) liên tục tại (0,0).

Giả sử $\alpha \leq 1$. Ta có

$$f(x, x) = \frac{x^{2\alpha}}{2x^2} = \frac{1}{2x^{2(1-\alpha)}}$$ không dần tới 0 khi $x \to 0$,

vậy f(x,y) không liên tục tại (0,0).

1.2. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1.2.1. Đạo hàm riêng

Cho hàm số $u = f(x,y)$ xác định trong một miền D ; $M_o(x_o, y_o)$ là một điểm của D. Nếu cho $y = y_o$, hàm số một biến số $x \mapsto f(x,y_o)$ có đạo hàm tại $x = x_o$, thì đạo hàm đó được gọi là *đạo hàm riêng của f đối với x* tại M_o và được kí hiệu là

$$f'_x(x_o, y_o) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) \text{ hay } \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o).$$

Đặt $\Delta_x f = f(x_o + \Delta x, y_o) - f(x_o, y_o)$. Biểu thức đó được gọi là số gia riêng của $f(x,y)$ theo x tại (x_o,y_o). Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}.$$

Tương tự như vậy, người ta định nghĩa đạo hàm riêng của f đối với y tại M_o, kí hiệu là

$$f'_y(x_o, y_o) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \text{ hay } \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o).$$

Các đạo hàm riêng của hàm số n biến số ($n \geqslant 3$) được định nghĩa tương tự. Khi tính đạo hàm riêng của một hàm số theo biến số nào, chỉ việc xem như hàm số chỉ phụ thuộc biến số ấy, các biến số khác được coi như không đổi, rồi áp dụng các quy tắc tính đạo hàm của hàm số một biến số.

Ví dụ 1 : $z = x^y$ $(x > 0)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Ví dụ 2 : $u = x^3 z \operatorname{arctg}\frac{y}{z}$ $(z \neq 0)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 z \operatorname{arctg}\frac{y}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^3 z \frac{1}{1 + \frac{y^2}{z^2}} \cdot \frac{1}{z} = \frac{x^3 z^2}{y^2 + z^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^3 \operatorname{arctg}\frac{y}{z} + x^3 z \frac{1}{1+\frac{y^2}{z^2}}\left(-\frac{y}{z^2}\right) = x^3\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{z} - \frac{yz}{y^2+z^2}\right).$$

Chú thích : $\frac{\partial f}{\partial x}$ là một kí hiệu, chứ không phải là một thương ; ∂f và ∂x đứng riêng rẽ không có ý nghĩa gì.

1.2.2. Vi phân toàn phần

• Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong miền D. Lấy các điểm $M_o(x_o, y_o) \in D$, $M(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) \in D$. Biểu thức $\Delta f = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o)$ được gọi là số gia toàn phần của f tại M_o. Nếu có thể biểu diễn nó dưới dạng

(1.1) $$\Delta f = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

trong đó A, B là những số chỉ phụ thuộc x_o, y_o, còn α, β dần tới 0 khi $M \to M_o$, tức là khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, thì ta nói rằng hàm số z là *khả vi tại* M_o, còn biểu thức $A\Delta x + B\Delta y$ được gọi là *vi phân toàn phần* của $z = f(x, y)$ tại M_o và được kí hiệu là dz hay df.

Hàm số $z = f(x,y)$ được gọi là *khả vi trong miền D* nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền ấy.

Chú thích. Nếu hàm số $f(x,y)$ khả vi tại $M_o(x_o, y_o)$ thì từ đẳng thức (1.1) suy ra rằng $\Delta f \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, vậy $f(x,y)$ liên tục tại M_o.

• Đối với hàm số một biến số $y = f(x)$, nếu tại $x = x_o$ tồn tại đạo hàm (hữu hạn) $f'(x_o)$ thì ta có

$$\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = f'(x_o)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

trong đó $\alpha \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, tức là $f(x)$ khả vi tại $x = x_o$. Đối với hàm số nhiều biến số $z = f(x, y)$, sự tồn tại của các đạo hàm riêng tại $M_o(x_o, y_o)$ chưa đủ để hàm số khả vi tại đó. Thật vậy, xét ví dụ sau :

Cho hàm số

$$f(x , y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x , y) \neq (0 , 0) \\ 0 & \text{nếu } (x , y) = (0 , 0) \end{cases}$$

Ta có

$$f'_x(0 , 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h , 0) - f(0 , 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h , 0)}{h} = 0 ,$$

vì $f(h,0) = 0$ nếu $h \neq 0$. Tương tự, ta có $f'_y(0,0) = 0$. Các đạo hàm riêng f'_x, f'_y tại (0,0) đều tồn tại, nhưng hàm số f(x,y) không liên tục tại (0,0) (xem ví dụ 3, mục 1.1.5) nên không khả vi tại (0,0).

Định lí sau đây cho ta điều kiện đủ để hàm số $z = f(x,y)$ khả vi tại $M_o(x_o, y_o)$.

Định lí 1.1. Nếu hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng ở lân cận điểm $M_o(x_o , y_o)$ và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_o thì f(x,y) khả vi tại M_o và ta có

(1.2) $$dz = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y.$$

Thật vậy, ta có

$$\Delta f = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) =$$

$$= [f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o + \Delta y)] + [f(x_o, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o)]$$

Áp dụng công thức số gia giới nội cho hàm số một biến số, ta được

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o + \Delta y) = \Delta x.f'_x(x_o + \theta_1\Delta x, y_o + \Delta y)$$

$$f(x_o, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) = \Delta y.f'_y(x_o, y_o + \theta_2\Delta y),$$

trong đó $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$. Nhưng vì f'_x và f'_y liên tục tại M_o nên

$$f'_x(x_o + \theta_1\Delta x, y_o + \Delta y) = f'_x(x_o, y_o) + \alpha,$$

$$f'_y(x_o, y_o + \theta_2\Delta y) = f'_y(x_o, y_o) + \beta$$

trong đó $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Do đó

$$\Delta f = f'_x(x_o, y_o).\Delta x + f'_y(x_o, y_o).\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

vậy f(x,y) khả vi tại M_o và ta có đẳng thức (1.2).

Chú thích. Cũng như đối với hàm số một biến số, nếu x, y là biến số độc lập thì $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, do đó

$$dz = f'_x dx + f'_y dy.$$

• Từ định nghĩa ta thấy rằng vi phân toàn phần df chỉ khác số gia toàn phần Δf một vô cùng bé bậc cao hơn $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Do đó khi Δx và Δy có trị số tuyệt đối khá bé, ta có thể xem $\Delta f \approx df$, tức là

(1.3) $$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) \approx f(x_o, y_o) + f'_x(x_o, y_o)\Delta x + f'_y(x_o, y_o)\Delta y$$

Ví dụ : Tính gần đúng arctg $\dfrac{1,02}{0,95}$.

Xét hàm số $z = \text{arctg}\dfrac{y}{x}$. Ta cần tính $z(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$, với $x_o = 1$, $y_o = 1$, $\Delta x = -0,05$, $\Delta y = 0,02$. Ta có $z'_x = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $z'_y = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Theo công thức (3), ta có

$$z(1 - 0,05\ ;\ 1 + 0,02) \approx z(1,1) + \frac{1\,.\,0,02 + 1\,.\,0,05}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + 0,035 = 0,785 + 0,035 = 0,82 \text{ radian.}$$

1.2.3. Đạo hàm của hàm số hợp

D là một tập hợp trong $\mathbf{R}^n$. Xét hai ánh xạ $\varphi : D \to \mathbf{R}^m$, $f : \varphi(D) \to \mathbf{R}$. Ánh xạ tích $fo\varphi$ xác định bởi

$$fo\varphi : (x_1, ..., x_n) \in D \xmapsto{\varphi} (u_1(x_1, ..., x_n), ..., u_m(x_1, ..., x_n)) \in \varphi(D)$$

$$\xmapsto{f} f(u_1(x_1, ..., x_n), ..., u_m(x_1, ..., x_n)) \in \mathbf{R}$$

được gọi là hàm số hợp của các biến số $x_1, ..., x_n$ qua các biến số trung gian $u_1, ..., u_m$. Để cho đơn giản, ta xét trường hợp $n = m = 2$. Đặt $F = fo\varphi$, ta có

$$F : (x,y) \in D \xmapsto{\varphi} (u(x,y), v(x,y)) \in \varphi(D) \xmapsto{f} f(u(x,y), v(x,y)) = F(x,y)$$

Định lí 1.2. Nếu f có các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ *liên tục trong* $\varphi(D)$ *và nếu u, v có các đạo hàm riêng* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ *trong D thì trong D tồn tại các đạo hàm riêng* $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ *và ta có*

$$(1.4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

Chứng minh. Giả sử $(x_o, y_o) \in D$, $(x_o + h, y_o) \in D$. Đặt

$$\delta = F(x_o + h, y_o) - F(x_o,y_o)$$
$$= f(u(x_o + h, y_o), v(x_o + h, y_o)) - f(u(x_o, y_o), v(x_o, y_o))$$

và kí hiệu $u_o = u(x_o, y_o)$, $u_1 = u(x_o + h, y_o)$, $v_o = v(x_o,y_o)$, $v_1 = v(x_o + h, y_o)$. Ta có

$$\delta = f(u_1,v_1) - f(u_o,v_o) = [f(u_1,v_1) - f(u_o,v_1)] + [f(u_o,v_1) - f(u_o,v_o)]$$

$$\frac{\delta}{h} = \frac{f(u_1, v_1) - f(u_o, v_1)}{u_1 - u_o} \cdot \frac{u_1 - u_o}{h} + \frac{f(u_o, v_1) - f(u_o, v_o)}{v_1 - v_o} \cdot \frac{v_1 - v_o}{h}.$$

Vì $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ liên tục trong Δ nên công thức số gia giới nội áp dụng vào $f(u_1, v_1) - f(u_o, v_1)$ và $f(u_o, v_1) - f(u_o, v_o)$ cho ta

$$\frac{\delta}{h} = \frac{\partial f}{\partial u}(u_2, v_1) \cdot \frac{u_1 - u_o}{h} + \frac{\partial f}{\partial v}(u_o, v_2)\frac{v_1 - v_o}{h},$$

trong đó $u_2 = u_o + \theta_1(u_1 - u_o)$, $v_2 = v_o + \theta_2(v_1 - v_o)$, $0 < \theta_1 < 1$. $0 < \theta_2 < 1$. Cho $h \to 0$, ta được

$$\lim_{h\to 0}\frac{\delta}{h} = \frac{\partial F}{\partial x}(x_o,y_o) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_o,v_o)\frac{\partial u}{\partial x}(x_o,y_o) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_o,v_o)\frac{\partial v}{\partial x}(x_o,y_o).$$

Đó là đẳng thức đầu của (1.4). Đẳng thức thứ hai của (1.4) được chứng minh tương tự. ■

Các công thức (1.4) có thể viết dưới dạng ma trận

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \quad \frac{\partial f}{\partial v}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix},$$

trong đó ma trận

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận Jacobi* của ánh xạ φ hay ma trận Jacobi của u, v đối với x, y, còn định thức của ma trận ấy được gọi là *định thức Jacobi* của u, v đối với x, y và được kí hiệu là $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$.

Trong tính toán, người ta không phân biệt f và F, chúng lấy cùng giá trị tại những điểm tương ứng (u, v) và (x,y). Có thể viết

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ví dụ : Cho $z = e^u \ln v$, $u = xy$, $v = x^2 + y^2$. Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^u \ln v \cdot y + e^u \cdot \frac{1}{v} \cdot 2x = e^{xy}\left[y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x}{x^2 + y^2}\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^u \ln v \cdot x + e^u \cdot \frac{1}{v} \cdot 2y = e^{xy}\left[x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2y}{x^2 + y^2}\right].$$

Chú thích 1. Nếu $z = f(x,y)$, $y = y(x)$ thì z là hàm số hợp của x, $z = f(x, y(x))$. Khi đó ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x).$$

Nếu $z = f(x,y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ thì z là hàm số hợp của t thông qua hai biến trung gian x, y. Khi đó ta có

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) .$$

Chú thích 2. Nếu giả thiết thêm rằng $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ liên tục thì từ (1.4) suy ra rằng $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục, do đó z xem như hàm số của x, y là khả vi và ta có

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy .$$

Thế các công thức (1.4) vào, ta có

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv .$$

Vậy vi phân toàn phần của hàm số $z = f(u,v)$ có cùng một dạng dù cho u, v là các biến số độc lập hay là các hàm số của những biến số độc lập khác. Do đó *vi phân toàn phần của hàm số nhiều biến số cũng có dạng bất biến* như vi phân của hàm số một biến số.

Các công thức

$$d(u \pm v) = du \pm dv,\ d(uv) = udv + vdu,\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

đúng khi u, v là các biến số độc lập nên cũng đúng khi u, v là những hàm số của các biến số khác.

1.2.4. Đạo hàm và vi phân cấp cao

- Cho hàm số hai biến số $z = f(x,y)$. Các đạo hàm riêng f'_x, f'_y là những đạo hàm riêng cấp một. Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp một nếu tồn tại được gọi là những đạo hàm riêng cấp hai. Ta có bốn đạo hàm riêng cấp hai được kí hiệu như sau :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x, y).$$

Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp hai, nếu tồn tại, được gọi là các đạo hàm riêng cấp ba,...

Ví dụ : $z = x^2y^3 + x^4$

$z'_x = 2xy^3 + 4x^3 \qquad z'_y = 3x^2y^2$

$z''_{x^2} = 2y^3 + 12x^2 \qquad z''_{yx} = 6xy^2$

$z''_{xy} = 6xy^2 \qquad z''_{y^2} = 6x^2y$.

Trong ví dụ trên ta nhận thấy rằng $z''_{xy} = z''_{yx}$. Liệu điều đó có luôn luôn đúng không ? Ta có định lí quan trọng sau đây :

Định lí 1.3 (Schwarz). Nếu trong một lân cận U nào đó của điểm $M_o(x_o, y_o)$ hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} và nếu các đạo hàm ấy liên tục tại M_o thì $f''_{xy} = f''_{yx}$ tại M_o.

Chứng minh. Giả sử h, k là những số đủ nhỏ, khác 0 sao cho các điểm $(x_o + h, y_o)$, $(x_o, y_o + k)$, $(x_o + h, y_o + k)$ thuộc miền U. Tính biểu thức

$\Delta = [f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o + k)] - [f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o)]$ theo hai cách khác nhau. Trước hết, đặt

$$\varphi(y) = f(x_o + h, y) - f(x_o, y),$$

ta có

$$\Delta = \varphi(y_o + k) - \varphi(y_o).$$

Theo công thức số gia giới nội, ta được

$$\Delta = k\varphi'(y_o + \theta_1 k),$$

trong đó $0 < \theta_1 < 1$. Nhưng

$$\varphi'(y) = f_y'(x_o + h, y) - f_y'(x_o, y)].$$

Vì vậy $\Delta = k[f'_y(x_o + h, y_o + \theta_1 k) - f'_y(x_o, y_o + \theta_1 k)]$.

Lại áp dụng công thức số gia giới nội đối với biến x ở vế phải, ta được $\Delta = khf''_{yx}(x_o + \theta_2 h, y_o + \theta_1 k)$,

trong đó $0 < \theta_2 < 1$. Bây giờ viết lại

$$\Delta = [f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o + h, y_o)] - [f(x_o, y_o + k) - f(x_o, y_o)] =$$

$$= \psi(x_o + h) - \psi(x_o),$$

trong đó

$$\psi(x) = f(x, y_o + k) - f(x, y_o).$$

Cũng như trên, tồn tại hai số θ_3, θ_4, $0 < \theta_3 < 1$, $0 < \theta_4 < 1$, sao cho $\Delta = h\psi'(x_o + \theta_3 h) =$

$$= h[f_x'(x_o + \theta_3 h, y_o + k) - f_x'(x_o + \theta_3 h, y_o)] =$$

$$= hkf''_{xy}(x_o + \theta_3 h, y_o + \theta_4 k).$$

So sánh hai kết quả tính trên, ta thấy

$$f''_{yx}(x_o + \theta_2 h, y_o + \theta_1 k) = f''_{xy}(x_o + \theta_3 h, y_o + \theta_4 k)$$

cho $h \to 0$, $k \to 0$, do giả thiết liên tục của f''_{yx} và f''_{xy} tại M_o, ta được

$$f''_{yx}(x_o, y_o) = f''_{xy}(x_o, y_o).$$

Định lí ấy cũng đúng cho các đạo hàm riêng cấp cao hơn của hàm số n biến số với $n \geq 3$. Chẳng hạn, nếu $u = f(x, y, z)$ thì $u'''_{xyz} = u'''_{yzx} = u'''_{zxy} = u'''_{xzy} = \ldots$ nếu các đạo hàm ấy liên tục.

• Xét hàm số $z = f(x,y)$. Vi phân toàn phần của nó

$$dz = f'_x dx + f'_y dy,$$

nếu tồn tại, cũng là một hàm số của x, y. Vi phân toàn phần của dz nếu tồn tại, được gọi là vi phân toàn phần cấp hai của z và được kí hiệu là d^2z . Vậy :

$$d^2z = d(dz) = d(f'_x dx + f'_y dy) .$$

Cứ tiếp tục như vậy người ta định nghĩa các vi phân cấp cao hơn

$$d^3z = d(d^2z)$$

....

$$d^nz = d(d^{n-1}z) .$$

Giả sử x, y là những biến số độc lập, khi ấy $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ đó là những hằng số không phụ thuộc x, y. Giả sử d^2z tồn tại. Ta có

$$d^2z = d(dz) = (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy =$$

$$= f''_{x^2} dx^2 + (f''_{xy} + f''_{yx}) dx\,dy + f''_{y^2} dy^2 .$$

Giả thiết rằng f''_{xy} và f''_{yx} liên tục, khi đó chúng bằng nhau, vì vậy

$$d^2z = f''_{x^2} dx^2 + 2 f''_{xy} dx\,dy + f''_{y^2} dy^2.$$

Người ta thường dùng kí hiệu tượng trưng

(1.5) $$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f$$

trong đó các bình phương của $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng hai lần đối với x, hai lần đối với y, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng một lần đối với y, một lần đối với x.

Tiếp tục tính toán như vậy, ta được công thức lũy thừa tượng trưng

(1.6) $$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f .$$

Bây giờ giả sử x, y không phải là biến số độc lập, mà là các hàm số của các biến số độc lập s, t. Khi ấy dx, dy không phải là những hằng số nữa, mà phụ thuộc vào s, t. Do đó

$$d^2z = d(dz) = d(f'_x dx + f'_y dy) =$$

$$= d(f'_x)dx + f'_x d(dx) + d(f'_y)dy + f'_y d(dy)$$

$$= f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dx\,dy + f''_{y^2}dy^2 + f'_x d^2x + f'_y d^2y.$$

Rõ ràng trong trường hợp này, công thức (1.5) không còn đúng nữa. Vi phân toàn phần cấp lớn hơn hoặc bằng 2 của hàm số nhiều biến số không có dạng bất biến.

1.2.5. Hàm số thuần nhất

D là một tập hợp trong $\mathbf{R}^n$ có tính chất sau : nếu điểm $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$, thì $\forall t > 0$ điểm $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$ cũng thuộc D, tức là nếu D chứa điểm M thì D cũng chứa tia nối O với M.

Hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định trên D được gọi là *thuần nhất bậc k* nếu

$$(1.7) \qquad f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ \forall t > 0.$$

Ví dụ : $\sqrt{x^2+y^2}$, $\ln\frac{x^2}{y^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $\frac{x^3y + y^2z^2 + xz^3}{x^2+y^2+z^2}$ là những hàm số thuần nhất theo thứ tự có bậc 1 xác định trên $\mathbf{R}^2$, bậc 0 xác định trên $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, bậc 2 xác định trên $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

• *Nếu f là một hàm số thuần nhất bậc k thì các đạo hàm riêng cấp một của nó là những hàm số thuần nhất bậc k − 1.*

Thật vậy, đạo hàm hai vế của (1.7) đối với x_i, ta được

$$t f'_{x_i}(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

do đó $f'_{x_i}(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^{k-1} f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ■

• *Hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là thuần nhất bậc k khi và chỉ khi*

(1.8) $$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf.$$

Công thức (1.8) được gọi là *công thức Euler*.

Thật vậy, giả sử f là hàm số thuần nhất bậc k, nó thỏa mãn (1.7). Lấy đạo hàm hai vế của (1.7) đối với t, ta được

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f'_{x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) = kt^{k-1} f(x_1, \ldots, x_n).$$

Cho t = 1 trong đẳng thức đó, ta được (1.8).

Đảo lại, giả sử hàm số f thỏa mãn đẳng thức (1.8). Trong (1.8) thay x_i bởi tx_i với mọi i ta được

$$\sum_{i=1}^{n} tx_i f'_{x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) = kf(tx_1, \ldots, tx_n).$$

Nhân hai vế với t^{k-1}, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f'_{x_i}(tx_1, \ldots, tx_n)\, t^k - kt^{k-1} f(tx_1, \ldots, tx_n) = 0.$$

Vế trái là tử số của đạo hàm theo t của $\dfrac{f(tx_1, \ldots, tx_n)}{t^k}$.

Đạo hàm đó bằng không, nên $\dfrac{f(tx_1, \ldots, tx_n)}{t^k}$ bằng hằng số C. Muốn tìm C chỉ việc cho t = 1, ta được $C = f(x_1, \ldots, x_n)$. Do đó

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, \ldots, x_n).$$

Đó chính là đẳng thức (1.7). ■

1.2.6. Đạo hàm theo hướng. Gradiên

• $u(x, y, z)$ là một hàm số xác định trong một miền $D \subset \mathbf{R}^3$. Qua điểm $M_o(x_o, y_o, z_o) \in D$ vẽ một đường thẳng định hướng mà vectơ đơn vị là $\vec{l}$; M là một điểm trên đường thẳng ấy, ta đó $\overrightarrow{M_oM} = \rho\vec{l}$, trong đó ρ là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{M_oM}$ (hình 1.4). Nếu khi $\rho \to 0$ (tức là M dần tới M_o theo hướng $\vec{l}$), tỉ số

$$\frac{\Delta u}{\rho} = \frac{u(M) - u(M_o)}{\rho}$$

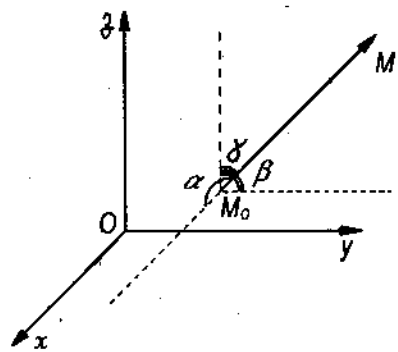
dần tới một giới hạn hữu hạn thì giới hạn ấy được gọi là *đạo hàm của hàm số u theo hướng $\vec{l}$* tại M_o và được kí hiệu là $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o)$.

Nếu $\vec{l}$ trùng với vectơ đơn vị $\vec{i}$ của trục Ox thì

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o) = \lim_{\rho \to 0} \frac{u(x_o + \rho, y_o, z_o) - u(x_o, y_o, z_o)}{\rho} = \frac{\partial u(x_o)}{\partial x}.$$

Vậy đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}$ chính là đạo hàm của u theo hướng của trục Ox. Cũng vậy $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ là đạo hàm của u theo hướng của Oy, Oz.

Đạo hàm của hàm số u theo hướng $\vec{l}$ biểu thị tốc độ biến thiên của u theo hướng $\vec{l}$.



Hình 1.4

Định lí 1.4. *Nếu hàm số $u = u(x, y, z)$ khả vi tại điểm $M_o(x_o, y_o, z_o)$ thì tại điểm ấy nó có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{l}$ và ta có*

$$(1.9)\quad \frac{\partial u(M_o)}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u(M_o)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_o)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_o)}{\partial z}\cos\gamma$$

trong đó $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *là các thành phần của* $\vec{l}$.

Chứng minh. Vì u(x,y,z) khả vi tại M, nên

$$\Delta u = u(M) - u(M_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_o)\,\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(M_o)\,\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}(M_o)\,\Delta z + \alpha(\rho),$$

trong đó $\alpha(\rho)$ là vô cùng bé bậc cao đối với ρ. Vì

$$\Delta x = \rho\cos\alpha,\ \Delta y = \rho\cos\beta,\ \Delta z = \rho\cos\gamma$$

nên

$$\frac{\Delta u}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}(M_o)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_o)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_o)\cos\gamma + \frac{\alpha(\rho)}{\rho}.$$

Chuyển qua giới hạn khi $\rho \to 0$, ta được (1.9). ■

• $u(x, y, z)$ là hàm số có các đạo hàm riêng tại $M_o(x_o, y_o, z_o)$. Người ta gọi građiên của u tại M_o là vectơ có các thành phần là

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_o),\ \frac{\partial u}{\partial y}(M_o),\ \frac{\partial u}{\partial z}(M_o)$$

và kí hiệu nó là $\overrightarrow{\text{grad}}\,u(M_o)$. Nếu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị của các trục Ox, Oy, Oz, ta có

$$(1.10)\qquad \overrightarrow{\text{grad}}\,u(M_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_o)\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_o)\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_o)\vec{k}.$$

Định lí 1.5. Nếu hàm số $u(x, y, z)$ khả vi tại M_o thì tại đó ta có

$$(1.11)\qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \text{ch}_{\vec{l}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u.$$

Thật vậy, vì $\vec{l} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$, nên công thức (1.9) có thể viết là

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o) = \overrightarrow{\text{grad}}\,u(M_o)\,.\,\vec{l} = |\vec{l}|\,.\,\text{ch}_{\vec{l}}\overrightarrow{\text{grad}}\,u(M_o) = \text{ch}_{\vec{l}}\overrightarrow{\text{grad}}\,u(M_o)\ ■$$

Chú thích. Từ (1.11) suy ra rằng $\left|\dfrac{\partial u(M_o)}{\partial \vec{l}}\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $|\overrightarrow{\text{grad}}\,u(M_o)|$. Khi $\vec{l}$ đồng phương với $\overrightarrow{\text{grad}}\,u$. Vậy $\overrightarrow{\text{grad}}\,u\,(M_o)$ *cho ta biết phương theo nó tốc độ biến thiên của u tại M_o có giá trị tuyệt đối cực đại.*

Ví dụ : Cho $u = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$. Tính $\overrightarrow{\text{grad}}\,u$ và $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ tại $M_o(1, 2, -1)$ biết $\vec{l}$ là vectơ đơn vị của $\overrightarrow{M_oM_1}$ với $M_1(2, 0, 1)$.

Ta có $u_x = 3x^2 + 3yz$, $u_y = 3y^2 + 3zx$, $u_z = 3z^2 + 3xy$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u = 3(x^2 + yz)\vec{i} + 3(y^2 + zx)\vec{j} + 3(z^2 + xy)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u\,(M_o) = 3(-\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}) .$$

Vì $\overrightarrow{M_oM_1}$ có các thành phần là $\{1, -2, 2\}$ nên

$$\cos\alpha = \frac{1}{3},\ \cos\beta = -\frac{2}{3},\ \cos\gamma = \frac{2}{3},\ \text{do đó}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o) = (-3)\left(\frac{1}{3}\right) + 9 . \left(\frac{-2}{3}\right) + 9\left(\frac{2}{3}\right) = -1 .$$

1.2.7. Công thức Taylor

Công thức số gia giới nội, công thức Taylor đối với hàm số một biến số cũng được mở rộng cho hàm số nhiều biến số.

Định lí 1.6. Giả sử hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp $(n + 1)$ liên tục trong một lân cận nào đó của điểm $M_o(x_o, y_o)$. Nếu điểm $M(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$ cũng nằm trong lân cận đó thì ta có

$$(1.12)\quad f(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y) - f(x_o, y_o) = df(x_o, y_o) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_o, y_o) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!}d^n f(x_o, y_o) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_o + \theta\Delta x, y_o + \theta\Delta y),$$

$$0 < \theta < 1.$$

Công thức (1.12) gọi là *công thức Taylor* đối với hàm số $f(x,y)$.

Chứng minh. Đặt $F(t) = f(x_o + t\Delta x, y_o + t\Delta y)$, $0 \leq t \leq 1$.

Vế trái của (1.12) bằng $F(1) - F(0)$. Vì $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp $(n + 1)$ liên tục, nên hàm số $F(t)$ có các đạo hàm liên tục đến cấp $(n + 1)$ trong đoạn $[0,1]$. Công thức Taylor áp dụng cho hàm số $F(t)$ cho ta

$$(1.13)\quad F(1) - F(0) = F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \dots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta),$$

$0 < \theta < 1$. Nhưng

$F'(0) = f'_x(x_o,y_o)\Delta x + f'_y(x_o, y_o)\,\Delta y = df(x_o, y_o)$

$F''(0) = f''_{x^2}(x_o,y_o)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_o,y_o)\Delta x\Delta y +$

$$+ f''_{y^2}(x_o, y_o)\,\Delta y^2 = d^2f(x_o, y_o)$$

. . . .

$F^{(n)}(0) = d^nf(x_o, y_o)$

$F^{(n+1)}(\theta) = d^{n+1}f(x_o + \theta\Delta x, y_o + \theta\Delta y).$

Thế các đẳng thức này vào (1.13) ta được (1.12). ■

Dùng công thức lũy thừa tượng trưng để biểu diễn vi phân cấp cao ta có thể viết công thức Taylor (1.12) như sau :

$$(1.12') \qquad f(M) - f(M_o) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(M_o) + \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(M_1)$$

với M_1 nằm trên đoạn thẳng nối M_o với M.

Chú thích. Nếu trong công thức (1.12) hay (1.12') cho $n = 1$, ta được

(1.14) $f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) = df(x_o + \theta\Delta x, y_o + \theta\Delta y)$

hay

$$(1.14') \qquad f(M) - f(M_o) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) f(M_1).$$

Đó là *công thức số gia giới nội* đối với hàm số f(x,y).

1.3. CỰC TRỊ

1.3.1. Cực trị của hàm số nhiều biến số

Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong một miền D nào đó, $M_o(x_o, y_o)$ là một điểm trong của D. Ta nói rằng f(x,y) đạt *cực trị* tại M_o nếu với mọi điểm M trong một lân cận nào đó của M_o, nhưng khác M_o, hiệu số $f(M) - f(M_o)$ có dấu không đổi.

Nếu $f(M) - f(M_o) > 0$, ta có cực tiểu ; nếu $f(M) - f(M_o) < 0$ ta có cực đại.

Trong phần này, ta sẽ dùng các kí hiệu sau :

$p = f'_x(M)$, $q = f'_y(M)$ $r = f''_{x^2}(M)$, $s = f''_{xy}(M)$, $t = f''_{y^2}(M)$.

Định lí 1.7. Nếu hàm số $z = f(x, y)$ đạt cực trị tại M_O mà tại đó các đạo hàm riêng $p = f'_x(M)$, $q = f'_y(M)$ tồn tại thì các đạo hàm riêng ấy bằng không :

(1.15) $$p = 0,\ q = 0 \text{ tại } M_o$$

Thật vậy. vì f đạt cực trị tại M_o nên nếu giữ $y = y_o$ thì hàm số một biến số $x \mapsto f(x, y_o)$ đạt cực trị tại $x = x_o$, vì đạo hàm riêng $f'x(x_o, y_o)$ tồn tại, nó phải bằng không theo định lí Fermat. Cũng vậy $f'_y(x_o, y_o) = 0$. ■

Điều kiện (1.15) là điều kiện ắt có của cực trị, nó cho phép ta thu hẹp việc tìm cực trị tại những điểm ở đó cả p và q đều triệt tiêu hoặc những điểm ở đó p hoặc q không tồn tại. Những điểm ấy được gọi là *điểm tới hạn.*

Định lí 1.8. Giả sử hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của $M_o(x_o, y_o)$. Giả sử tại M_o ta có $p = 0$, $q = 0$. Khi đó tại M_o.

1) Nếu $s^2 - rt < 0$ thì $f(x, y)$ đạt cực trị tại M_o. Đó là cực tiểu nếu $r > 0$, là cực đại nếu $r < 0$.

2) Nếu $s^2 - rt > 0$ thì $f(x, y)$ không đạt cực trị tại M_o.

3) Nếu $s^2 - rt = 0$ thì $f(x,y)$ có thể đạt cực trị tại M_o, cũng có thể không đạt cực trị tại M_o (trường hợp nghi ngờ).

Chứng minh. Giả sử điểm $M(x_o + h, y_o + k)$ ở lân cận M_o. Đặt $\Delta = f(M) - f(M_o)$. Theo công thức Taylor, ta có

(1.16) $$\Delta = \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + R(h, k)$$

trong đó R(h, k) là một vô cùng bé bậc ba đối với $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$. Do đó khi h và k khá nhỏ thì Δ cùng dấu với $g(h,k) = rh^2 + 2shk + tk^2$.

Nếu $k \neq 0$, $g(h, k) = k^2(ru^2 + 2su + t)$, trong đó $u = \dfrac{h}{k}$.

Giả sử $s^2 - rt < 0$, tam thức bậc hai $ru^2 + 2su + t$ luôn cùng dấu với r, Δ cũng vậy. Còn nếu $k = 0$ thì $g(h, k) = rh^2$, nó luôn có dấu của r ($r \neq 0$, vì $s^2 - rt < 0$).

Giả sử $s^2 - rt > 0$, tam thức $ru^2 + 2su + t$ đổi dấu khi u biến thiên, do đó Δ cũng đổi dấu, f không đạt cực trị tại M_o.

Giả sử $s^2 - rt = 0$, tam thức $ru^2 + 2su + t$ có một nghiệm kép u_o. Nếu $\dfrac{h}{k} = u_o$, dấu của Δ là dấu của vô cùng bé bậc ba R(h, k) trong công thức (1.16). Điều này ta không làm ở đây. ■

Ví dụ : Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + 2y^3 - 3x - 6y$.

Ta có $p = 3x^2 - 3$, $q = 6y^2 - 6$, $r = 6x$, $s = 0$, $t = 12y$. $p = 0$ và $q = 0$ khi $x = \pm 1$ và $y = \pm 1$. Vậy ta có bốn điểm tới hạn là $M_1(1,1)$, $M_2(-1,1)$, $M_3(-1,-1)$, $M_4(1, -1)$.

Tại M_1 ta có $r = 6$, $s = 0$, $t = 12$, $s^2 - rt = -72$, M_1 là điểm cực tiểu.

Tại M_3 ta có $r = -6$, $s = 0$, $t = -12$, $s^2 - rt = -72$, M_3 là điểm cực đại.

Tại M_2 ta có $r = -6$, $s = 0$, $t = 12$, $s^2 - rt = 72$, M_2 không là điểm cực trị.

Tại M_4 ta có $r = 6$, $s = 0$, $t = -12$, $s^2 - rt = 72$, M_4 không là điểm cực trị.

Chú thích. Nếu tại điểm M_o ta có $p = q = r = s = t = 0$, thì ta phải khai triển hàm số f theo công thức Taylor đến các số hạng cấp ba. Ta không xét trường hợp đó trong giáo trình này.

Trong trường hợp hàm số n biến số, ta phải xét dấu của các số hạng cấp hai trong khai triển Taylor, tức là phải xét dấu một dạng toàn phương n biến số. Giáo trình này cũng không xét trường hợp đó.

1.3.2. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số nhiều biến số trong một miền đóng bị chặn. Ta biết rằng mọi hàm số nhiều biến số liên tục trong một miền đóng bị chặn D đều đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của nó trong miền ấy. Nếu hàm số đạt giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất tại một điểm trong của miền D thì điểm ấy phải là điểm cực trị của hàm số, do đó phải là điểm tới hạn. Hàm số cũng có thể đạt giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất trên biên của miền D. Do đó muốn tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trong miền đóng D ta có thể tìm những điểm tới hạn của nó ở trong D, tính giá trị của hàm số tại các điểm ấy và so sánh chúng với những giá trị của hàm số trên biên của D.

Ví dụ : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$z = 8x^2 + 3y^2 + 1 - (2x^2 + y^2 + 1)^2$$

trong miền tròn đóng D xác định bởi $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Rõ ràng z liên tục với mọi x, y, nên nó đạt giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên miền D. Ta có

$$p = 16x - 2(2x^2 + y^2 + 1)\,4x = 8x(1 - 2x^2 - y^2)$$

$$q = 6y - 2(2x^2 + y^2 + 1)2y = 2y(1 - 4x^2 - 2y^2).$$

Cho $p = 0$, $q = 0$, ta được

1) $x = 0, y = 0$

2) $x = 0$, $1 - 2y^2 = 0$ hay $x = 0$, $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

3) $y = 0$, $1 - 2x^2 = 0$ hay $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$

4) $\begin{cases} 1 - 2x^2 - y^2 = 0 \\ 1 - 4x^2 - 2y^2 = 0 \end{cases}$, hệ này vô nghiệm.

Vậy ta có năm *điểm tới hạn* là gốc O, $A_1\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $A_2\left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $A_3\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $A_4\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Cả năm điểm tới hạn này đều nằm trong miền D. Tính giá trị của z tại các điểm ấy, ta được

$$z(0) = 0,\ z(A_1) = z(A_2) = \frac{1}{4},\ z(A_3) = z(A_4) = 1.$$

Bây giờ ta xét giá trị của z trên biên của miền D. Trên biên ấy $x^2 + y^2 = 1$, vậy $y^2 = 1 - x^2$, do đó

$$z = 8x^2 + 3(1 - x^2) + 1 - (2x^2 + 1 - x^2 + 1)^2 =$$
$$= -x^4 + x^2 = x^2(1 - x^2).$$

Ta phải tìm giá trị của hàm số ấy với $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Rõ ràng hàm số ấy bằng 0 khi $x = \pm 1$ và đạt giá trị lớn nhất khi $x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$; giá trị lớn nhất ấy bằng $\frac{1}{4}$.

So sánh tất cả các giá trị đã tính, ta thấy rằng hàm số z đã cho đạt giá trị nhỏ nhất $m = 0$ tại gốc O và đạt giá trị lớn nhất $M = 1$ tại các điểm A_3, A_4.

1.4. HÀM SỐ ẨN. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

1.4.1. Khái niệm hàm số ẩn

Cho phương trình

$$F(x, y) = 0, \tag{1.17}$$

trong đó $F : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên tập hợp $U \subset \mathbf{R}^2$. Nếu với mỗi giá trị $x = x_o$ trong một khoảng I nào đó, có một hay nhiều giá trị y_o sao cho $F(x_o, y_o) = 0$, ta nói rằng phương trình (1.17) xác định một hay nhiều hàm số ẩn y theo x trong khoảng I. Vậy hàm số $f : I \to \mathbf{R}$ là hàm số ẩn xác định bởi (1.17) nếu

$$\forall x \in I,\ (x, f(x)) \in U \text{ và } F(x, f(x)) = 0.$$

Chẳng hạn từ phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ta được

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Phương trình ấy xác định hai hàm số ẩn trong khoảng [-a, a]. Trong trường hợp này, ta đã tìm được biểu thức tường minh của y theo x. Điều này không phải lúc nào cũng làm được, chẳng hạn, từ hệ thức $x^y = y^x$ $(x > 0, y > 0)$ không thể tính được tường minh y theo x.

Tương tự như vậy, phương trình

$$F(x, y, z) = 0$$

trong đó $F : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên tập hợp mở $U \subset \mathbf{R}^3$, có thể xác định một hay nhiều hàm số ẩn z của các biến số x, y. Hệ hai phương trình

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = 0 \\ G(x, y, z, u, v) = 0 \end{cases}$$

trong đó $F : U \to \mathbf{R}$, $G : U \to \mathbf{R}$ là các hàm số xác định trên tập hợp $U \subset \mathbf{R}^5$, có thể xác định một hay nhiều cặp hàm số ẩn u, v của các biến số x, y, z.

Ta có các định lí sau về sự tồn tại, tính liên tục và tính khả vi của các hàm số ẩn.

Định lí 1.9. Cho phương trình

$$(1.17) \qquad F(x, y) = 0,$$

trong đó $F : U \to \mathbf{R}$ *là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên một tập hợp mở* $U \subset \mathbf{R}^2$. *Giả sử* $(x_o, y_o) \in U$, $F(x_o, y_o) = 0$. *Nếu* $F'_y(x_o, y_o) \neq 0$ *thì phương trình* (1.17) *xác định trong một lân cận nào đó của* x_o *một hàm số ẩn* $y = f(x)$ *duy nhất, hàm số ấy có giá trị bằng* y_o *khi* $x = x_o$, *liên tục và có đạo hàm liên tục trong lân cận nói trên.*

Chứng minh. Không giảm tính tổng quát, có thể giả thiết $F'_y(x_o, y_o) > 0$. Vì F'_y liên tục trên U nên tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho

$$F'_y(x, y) > 0, \forall (x, y) \in [x_o - \alpha, x_o + \alpha] \times [y_o - \alpha, y_o + \alpha].$$

Hàm số $y \mapsto f(x_o, y)$ có đạo hàm $F'_y(x_o, y) > 0$ trên đoạn $[y_o - \alpha, y_o + \alpha]$, nên tăng ngặt trên đoạn đó. Vì $F(x_o, y_o) = 0$, nên

$$f(x_o, y_o - \alpha) < 0, \ f(x_o, y_o + \alpha) > 0 .$$

Các hàm số $x \mapsto F(x, y_o - \alpha)$ và $x \mapsto F(x, y_o + \alpha)$ liên tục trên đoạn $[x_o - \alpha, x_o + \alpha]$, nên tồn tại số $\delta > 0$ sao cho

$F(x, y_o - \alpha) < 0, \ F(x, y_o + \alpha) > 0, \ \forall x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$
Lấy x bất kì trên $(x_o - \delta, x_o + \delta)$. Hàm số $y \mapsto F(x, y)$ liên tục trên đoạn $[y_o - \alpha, y_o + \alpha]$, lấy những giá trị khác dấu tại $y_o - \alpha$ và $y_o + \alpha$. Do đó tồn tại $y \in (y_o - \alpha, y_o + \alpha)$ để cho $F(x, y) = 0$. Giá trị y ấy duy nhất, vì hàm số $y \mapsto F(x, y)$ tăng ngặt trên $[y_o - \alpha, y_o + \alpha]$. Vậy hệ thức (1.17) xác định y là hàm số ẩn của x duy nhất trên $(x_o - \delta, x_o + \delta)$.

Đặt $y = f(x)$, đương nhiên $f(x_o) = y_o$. Ta sẽ chứng minh rằng hàm số ẩn f liên tục trên $(x_o - \delta, x_o + \delta)$. Thật vậy, giả sử $x_1 \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$, ε là một số dương cho trước. Đặt $y_1 = f(x_1)$. Theo trên, $y_1 \in (y_o - \alpha, y_o + \alpha)$, $f(x_1, y_1) = 0$. Khi đó, $\forall \alpha_1 > 0$ đủ nhỏ, tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho hệ thức (1.17) xác định một hàm số ẩn duy nhất f_1 :

$(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \rightarrow (y_1 - \alpha_1, y_1 + \alpha_1)$. Chọn $\alpha_1 < \varepsilon$ sao cho

$(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \times (y_1 - \alpha_1, y_1 + \alpha_1) \subset (x_o - \delta, x_o + \delta) \times (y_o - \delta, y_o + \delta)$.

Rõ ràng ta có

$$f_1(x) = f(x) \ \forall x \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1).$$

Vậy

$|x - x_1| < \delta_1$ kéo theo $|f_1(x) - y_1| = |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$. Do đó $f(x)$ liên tục tại x_1.

Cuối cùng, ta chứng minh rằng f khả vi trên $(x_o - \delta, x_o + \delta)$. Giả sử $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$, $x + h \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$. Khi đó $F(x, f(x)) = 0$, $F(x + h, f(x + h)) = 0$.

Theo công thức số gia giới nội, ta có

$$0 = F(x + h ; f(x + h)) - F(x, f(x)) =$$

$$= hF'_x(x+\theta h,\ f(x) + \theta(f(x+h) - f(x))) +$$

$$+ (f(x+h) - f(x))F'_y(x+\theta h,\ f(x) + \theta(f(x+h) - f(x))).$$

Do đó

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{F'_x(x+\theta h,\ f(x) + \theta(f(x+h) - f(x)))}{F'_y(x+\theta h,\ f(x) + \theta(f(x+h) - f(x)))}.$$

Cho $h \to 0$, vì F'_x và F'_y liên tục tại $(x, f(x))$, f liên tục tại x nên vế phải của đẳng thức trên có giới hạn là

$$-\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Do đó hàm f có đạo hàm tại x, cho bởi

$$f' = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

đạo hàm ấy liên tục vì F'_x, F'_y và f liên tục.

Chú thích. Nếu $F'_y(x_o, y_o) = 0$, nhưng $F'_x(x_o, y_o) \neq 0$ thì định lí 1.9 khẳng định rằng phương trình (1.17) xác định trong một lân cận nào đó của y_o một hàm số ẩn duy nhất $x = g(y)$, hàm số ấy có giá trị bằng x_o khi $y = y_o$, liên tục và có đạo hàm liên tục trong lân cận nói trên. Nếu $F'_y(x_o, y_o) = F'_x(x_o, y_o) = 0$ thì không kết luận được gì về sự tồn tại của hàm số ẩn xác định bởi (1.17). Điểm (x_o, y_o) tại đó $F'_x(x_o, y_o) = F'_y(x_o, y_o) = 0$ được gọi là *điểm kì dị* của phương trình (1.17).

Định lí 1.10. Cho phương trình

(1.18) $$F(x, y, z) = 0,$$

trong đó $F : U \to \mathbf{R}$ *là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên một tập hợp mở* $U \subset \mathbf{R}^3$. *Giả sử* $(x_o, y_o, z_o) \in U$, $F(x_o, y_o, z_o) = 0$. *Nếu* $F'_z(x_o, y_o, z_o) \neq 0$ *thì phương trình* (1.18) *xác định trong một lân cận nào đó của điểm* (x_o, y_o) *một hàm số ẩn duy nhất* $z = f(x, y)$, *hàm số ấy có giá trị bằng* z_o *khi* $x = x_o$, $y = y_o$, *liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận nói trên.*

Chứng minh tương tự như chứng minh định lí 1.9.

Định lí 1.11. Cho hệ hai phương trình

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = 0 \\ G(x, y, z, u, v) = 0, \end{cases} \tag{1.19}$$

trong đó $F : U \to \mathbf{R}$, $G : U \to \mathbf{R}$ *là hai hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên một tập hợp mở* $U \subset \mathbf{R}^5$. *Giả sử* $(x_o, y_o, z_o, u_o, v_o) \in U$, $F(x_o, y_o, z_o, u_o, v_o) = 0$, $G(x_o, y_o, z_o, u_o, v_o) = 0$. *Nếu tại điểm ấy, định thức Jacobi*

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

thì hệ (1.19) *xác định trong một lân cận nào đó của điểm* (x_o, y_o, z_o) *một cặp hàm số ẩn duy nhất* $u = f(x, y, z)$, $v = g(x, y, z)$, *các hàm số ấy có giá trị theo thứ tự bằng* u_o, v_o *khi* $x = x_o$, $y = y_o$, $z = z_o$, *chúng liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận nói trên.*

Ta thừa nhận định lí này.

1.4.2. Đạo hàm của hàm số ẩn

• Giả sử các giả thiết của định lí 1.9 được thỏa mãn. Khi ấy phương trình (1.17) xác định một hàm số ẩn $y = f(x)$, liên tục và có đạo hàm liên tục trong một khoảng nào đó. Trong khoảng ấy ta có

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Lấy đạo hàm hai vế đối với x, ta được

$$F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Vì $F'_y \neq 0$, ta có

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Ví dụ. $$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$F'_x = \frac{2x}{a^2}, \ F'_y = \frac{2y}{b^2}.$$

Với $y \neq 0$, ta có $F'_y \neq 0$. Khi đó phương trình trên xác định một hàm số ẩn $y = y(x)$, và

$$y' = -\frac{b^2}{a^2}.\frac{x}{y}.$$

• Giả sử các giả thiết của định lí 1.10 được thỏa mãn. Phương trình (1.18) xác định một hàm số ẩn $z = f(x, y)$, liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong một miền nào đó. Trong miền ấy ta có

$$F(x, y, f(x, y)) = 0.$$

Lấy đạo hàm hai vế lần lượt đối với x và y, ta được

$$F'_x + F'_z . z'_x = 0$$

$$F'_y + F'_z . z'_y = 0.$$

Vì $F'_z \neq 0$, ta được

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Ví dụ : $$F(x, y, z) = e^z + xy + x^2 + z^3 - 1 = 0$$

$$F'_x = y + 2x, \ F'_y = x, \ F'_z = e^z + 3z^2.$$

Vì $F'_z \neq 0 \ \forall z$, nên phương trình trên xác định một hàm số ẩn $z = f(x, y)$ liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục :

$$z'_x = -\frac{2x + y}{e^z + 3z^2}, \ z'_y = -\frac{x}{e^z + 3z^2}.$$

• Giả sử các giả thiết của định lí 1.11 được thỏa mãn. Hệ phương trình (1.19) xác định hai hàm số ẩn $u = f(x, y, z)$, $v = g(x, y, z)$, liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong một miền nào đó. Trong miền ấy, ta có

$$\begin{cases} F(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z)) = 0 \\ G(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z)) = 0. \end{cases}$$

Lấy đạo hàm đối với x từng phương trình của hệ trên, ta được

$$\begin{cases} F'_x + F_u' \cdot u'_x + F'_v \cdot v'_x = 0 \\ G'_x + G'_u \cdot u'_x + G'_v \cdot v'_x = 0 \end{cases}$$

Đó là một hệ hai phương trình tuyến tính đối với u'_x, v'_x. Vì định thức của hệ ấy là

$$\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} = \frac{D(F, G)}{D(u, v)} \neq 0,$$

hệ ấy có một nghiệm duy nhất

$$u'_x = -\frac{\dfrac{D(F, G)}{D(x, v)}}{\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}}, \quad v'_x = -\frac{\dfrac{D(F, G)}{D(u, x)}}{\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}}$$

Tương tự như vậy, có thể tính được u'_y, v'_y, u_z', v_z'.

1.4.3. Định lí về ánh xạ ngược

Định lí 1.12. Giả sử U *là một tập hợp mở trong* $\mathbf{R}^2$. *Cho ánh xạ* $T : U \to \mathbf{R}^2$, $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ *các hàm số* $u(x, y)$, $v(x, y)$ *có các đạo hàm riêng liên tục trên* U. *Giả sử* $(x_o, y_o) \in U$, $u_o = u(x_o, y_o)$, $v_o = v(x_o, y_o)$. *Nếu tại* (x_o, y_o), *định thức Jacobi*

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

thì :

1) *Có một lân cận* V *của* (x_o, y_o) *sao cho* $W = T(V)$ *là một lân cận của* (u_o, v_o), *ánh xạ* T *hạn chế trên* V (*kí hiệu là* $T|_V$) *là một song ánh từ* V *lên* W.

2) *Ánh xạ ngược* T^{-1} *từ* W *lên* V *được xác định bởi*

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v)),$$

x(u, v), y(u, v) *có các đạo hàm riêng liên tục trên* W.

3) (1.20) $$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 1.$$

Chứng minh. Đặt $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Xét hệ phương trình

(1.21) $$\begin{cases} F(x, y, u, v) = u(x, y) - u = 0 \\ G(x, y, u, v) = v(x, y) - v = 0, \end{cases}$$

F và G là hai hàm số có đạo hàm riêng liên tục trên $U \times \Omega$, trong đó $\Omega = F(U)$. Rõ ràng (x_o, y_o, u_o, v_o) là một nghiệm của hệ (1.21). Vì

$$\frac{D(F, G)}{D(x, y)}(x_o, y_o, u_o, v_o) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}(x_o, y_o) = \frac{D(u, v)}{D(x, y)}(x_o, y_o) \neq 0,$$

theo định lí 1.11, hệ (1.21) xác định một cặp hàm số ẩn duy nhất $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận W của (u_o, v_o). $V = T^{-1}(W)$ là một lân cận của (x_o, y_o). $T|_V$ là một song ánh từ V lên W.

Lấy đạo hàm các phương trình của hệ (1.21) theo u và v, ta được

$$u'_x x'_u + u'_y y'_u - 1 = 0$$

$$v'_x x'_u + v'_y y'_u = 0 \quad u'_x x'_v + u'_y y'_v = 0 \quad v'_x x'_v + v'_y y'_v - 1 = 0.$$

Từ đó, ta có

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u'_x x'_u + u'_y y'_u & u'_x x'_v + u'_y y'_v \\ v'_x x'_u + v'_y y'_u & v'_x x'_v + v'_y y'_v \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Chú thích. Với hàm số $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ khả vi liên tục, nếu $f'(x) \neq 0$ $\forall x$ thì f có hàm số ngược toàn cục f^{-1} khả vi liên tục và $(f^{-1})'[f(x)] = \dfrac{1}{f'(x)}$. Định lí 1.12 là mở rộng kết quả ấy sang ánh xạ $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$. Nhưng điều kiện định thức Jacobi của T khác không chỉ đảm bảo rằng ánh xạ ngược T^{-1} chỉ tồn tại địa phương ở lân cận mỗi điểm.

1.4.4. Cực trị có điều kiện

Người ta gọi cực trị của hàm số

(1.22) $$z = f(x,y)$$

trong đó các biến số x và y bị ràng buộc bởi hệ thức

(1.23) $$g(x,y) = 0$$

là cực trị có điều kiện.

● *Điều kiện ắt có của cực trị có điều kiện*

Định lí. Giả sử $M_o(x_o, y_o)$ là điểm cực trị có điều kiện của hàm số (1.22) với điều kiện (1.23). Giả sử

1) Ở lân cận M_o các hàm số $f(x,y)$, $g(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp một liên tục,

2) Các đạo hàm riêng g'_x, g'_y không đồng thời bằng không tại M_o. Khi đó ta có tại M_o

(1.24) $$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0.$$

Chứng minh. Đương nhiên ta có $g(x_o, y_o) = 0$. Từ giả thiết 2, có thể xem như $g'_y(x_o, y_o) \neq 0$. Theo định lí về hàm số ẩn, hệ thức (1.23) xác định một hàm số ẩn $y = y(x)$ khả vi ở lân cận x_o. Thế $y = y(x)$ vào (1.22), hàm số một biến số $x \mapsto f(x, y(x))$ đạt cực trị tại $x = x_o$, do đó

$$f'_x(x_o, y_o) + f'_y(x_o, y_o)y'(x_o) = 0$$

hay

$$f'_x(x_o, y_o)dx + f'_y(x_o, y_o)dy = 0. \tag{1.25}$$

Mặt khác, lấy vi phân hai vế của (1.23), ta được

$$g'_x(x_o, y_o)dx + g'_y(x_o, y_o)dy = 0. \tag{1.26}$$

Xem hệ (1.25), (1.26) là hệ hai phương trình tuyến tính thuần nhất đối với dx, dy, hệ ấy có nghiệm không tầm thường, vậy định thức của nó bằng không

$$\begin{vmatrix} f'_x(x_o, y_o) & f'_y(x_o, y_o) \\ g'_x(x_o, y_o) & g'_y(x_o, y_o) \end{vmatrix} = 0$$

Đó chính là hệ thức (1.24) mà ta cần chứng minh.

Hệ thức (1.24) cùng với điều kiện (1.23) cho phép ta xác định (x_o, y_o).

Chú thích 1. Hệ thức (1.24) lại là điều kiện cần và đủ để cho hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x(x_o, y_o) + \lambda g'_x(x_o, y_o) = 0 \\ f'_y(x_o, y_o) + \lambda g'_y(x_o, y_o) = 0, \end{cases}$$

xem là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất đối với 1, λ có nghiệm không tầm thường. Do đó *nếu các điều kiện của định lí được thỏa mãn thì tồn tại một số λ sao cho tại điểm M_o ta có*

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) = 0. \end{cases} \tag{1.27}$$

Hệ phương trình (1.27) cùng với phương trình (1.23) cho phép ta tìm λ, x_o và y_o. Số λ được gọi là *nhân tử Lagrange*. Phương pháp tìm (x_o, y_o) như vừa trình bầy được gọi là *phương pháp nhân tử Lagrange.*

Chú thích 2. Định lí trên cũng như phương pháp nhân tử Lagrange giúp ta thu hẹp việc tìm cực trị có điều kiện của hàm số (1.22) với điều kiện (1.23) tại những điểm có tọa độ thỏa mãn hệ thức (1.24) hay hệ (1.27) hoặc tại những điểm ở đó các điều kiện 1/ hoặc 2/ của định lí không được thỏa mãn. Những điểm ấy được gọi là *điểm tới hạn.* Ta còn phải xét xem những điểm ấy có thực sự là điểm cực trị không.

Ví dụ 1 : Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $ax + by + c = 0$ $(c \neq 0)$

Điều kiện (1.24) cho ta

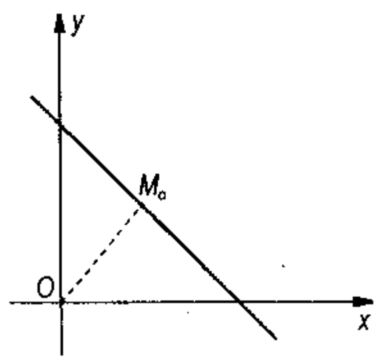
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} \\ ax + by + c = 0 , \end{cases}$$

ta được một điểm tới hạn duy nhất

$$M_o\left(-\frac{ac}{a^2+b^2}, -\frac{bc}{a^2+b^2}\right).$$



Hình 1.5

Về mặt hình học, ta phải tìm cực trị của bình phương khoảng cách từ gốc O đến một điểm trên đường thẳng $ax + by + c = 0$ (hình 1.5). Bài toán này có một cực tiểu, không có cực đại, do đó cực tiểu chỉ có thể đạt được tại điểm tới hạn, cực tiểu ấy bằng $\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$, đây là một kết quả quen thuộc.

• Phương pháp khảo sát trên cũng được mở rộng cho hàm số n biến số ($n \geq 3$).

$$(1.31)\qquad \begin{cases} f'_x(x,y,z) + \lambda g'_x(x,y,z) = 0 \\ f'_y(x,y,z) + \lambda g'_y(x,y,z) = 0 \\ f'_z(x,y,z) + \lambda g'_z(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Ví dụ 2 : Tìm cực trị của hàm số $u = x - 2y + 2z$ với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Các hệ thức (1.30) cho ta $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

ta tìm được hai điểm tới hạn $M_1\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ và $M_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Để xét xem điểm M_1 có là điểm cực trị không, ta cho x, y, z những số gia h, k, l ở lân cận M_1 và xét dấu của số gia

$$\Delta u = \left(\frac{1}{3} + h\right) - 2\left(-\frac{2}{3} + k\right) + 2\left(\frac{2}{3} + l\right) - \left[\frac{1}{3} - 2\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right)\right] = h - 2k + 2l.$$

Mặt khác, ta phải có

$$\left(\frac{1}{3} + h\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} + k\right)^2 + \left(\frac{2}{3} + l\right)^2 = 1$$

hay

$$\frac{2h}{3} - \frac{4k}{3} + \frac{4l}{3} + h^2 + k^2 + l^2 = 0.$$

Do đó

$$\Delta u = h - 2k + 2l = -\frac{3}{2}(h^2 + k^2 + l^2) < 0$$

nếu h, k, l không đồng thời bằng không. Vậy M_1 là điểm cực đại, $u(M_1) = 3$, tương tự, có thể thấy M_2 là điểm cực tiểu, $u(M_2) = -3$.

Cũng có thể nhận xét như sau : Hàm số $u = x - 2y + 3z$ liên tục trong $\mathbf{R}^3$, nên nếu chỉ xét u trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ thì u cũng liên tục. Đương nhiên mặt cầu là một tập hợp đóng bị chặn, nên thu hẹp của u trên mặt cầu đạt giá trị lớn nhất và bé nhất của nó trên mặt cầu, vậy chỉ có thể có các giá trị ấy tại hai điểm tới hạn M_1, M_2.

• Trường hợp hàm số ba biến số bị ràng buộc với nhau bởi hai hệ thức :

Giả sử $M_o(x_o, y_o, z_o)$ là điểm cực trị của hàm số

(1.32) $$u = f(x,y,z),$$

trong đó các biến số x,y,z thỏa mãn hai hệ thức

(1.33) $$g(x, y, z) = 0$$

(1.34) $$h(x, y, z) = 0.$$

Giả sử : 1) các hàm số f, g, h có các đạo hàm riêng cấp một liên tục ở lân cận M_o,

2) định thức Jacobi

$$\frac{D(g, h)}{D(y, z)} \neq 0 \text{ tại } M_o.$$

Khi đó ta có tại M_o

(1.35) $$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ h'_x & h'_y & h'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Thật vậy, lập luận như trong các trường hợp trên ta có tại M_o

$$\begin{cases} f'_x + f'_y y'_x + f'_z z'_x = 0 \\ g'_x + g'_y y'_x + g'_z z'_x = 0 \\ h'_x + h'_y y'_x + h'_z z'_x = 0. \end{cases}$$

Xem đó là một hệ ba phương trình tuyến tính thuần nhất đối với 1, y'_x, z'_x ; hệ ấy có nghiệm không tầm thường nên định thức của nó bằng không, vậy ta được hệ thức (1.35). ■

Hệ thức (1.35) cùng với các điều kiện (1.33), (1.34) giúp ta tìm (x_o, y_o, z_o).

Trong trường hợp này phương pháp nhân tử Lagrange được phát biểu như sau : Tìm năm số λ, μ, x_o, y_o, z_o thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x + \lambda g'_x + \mu h'_x = 0 \\ f'_y + \lambda g'_y + \mu h'_y = 0 \\ f'_z + \lambda g'_z + \mu h'_z = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

TÓM TẮT CHƯƠNG I

- Giới hạn của hàm số f(x, y) tại một điểm

Ta nói rằng f(x, y) dẫn đến l khi (x, y) dần tới (x_o, y_o) nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ sao cho

$$\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon.$$

Kí hiệu $\lim\limits_{(x, y) \to (x_o, y_o)} f(x, y) = l$.

- Tính liên tục của hàm số f(x, y) tại một điểm

Ta nói rằng f(x, y) liên tục tại điểm (x_o, y_o) nếu f(x, y) xác định tại (x_o, y_o) và $\lim\limits_{(x, y) \to (x_o, y_o)} f(x, y) = f(x_o, y_o)$.

- Đạo hàm riêng

$$f'_x(x_o, y_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o)}{h}.$$

Khi tính đạo hàm riêng của f theo x thì y được xem như không đổi. Định nghĩa tương tự với $f'_y(x_o, y_o) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)$.

- Vi phân toàn phần

$$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Dạng của nó không đổi dù x, y là biến số độc lập hay x, y là hàm số của các biến số khác.

$df(x, y)$ là phần chính của số gia $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Công thức tính gần đúng

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

- Đạo hàm của hàm số hợp

$$F = f \circ \varphi : (x, y) \overset{\varphi}{\longmapsto} (u(x, y), v(x, y)) \overset{f}{\longmapsto} f(u(x, y), v(x, y))$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}.$$

- Đạo hàm của hàm số ẩn

Với một số điều kiện, hệ thức $F(x, y) = 0$ xác định một hàm số ẩn $y = y(x)$. Ta có

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Với một số điều kiện, hệ thức $F(x, y, z) = 0$ xác định một hàm số ẩn $z = z(x, y)$. Ta có

$$z'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad z'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

- Đạo hàm riêng cấp cao

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}, \ \ldots$$

Nếu hàm số f(x, y) có các đạo hàm riêng $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ trong miền D và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại điểm $M_o \in D$ thì tại điểm ấy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

- Vi phân cấp cao

$$d(df) = d^2f,\ d(d^2f) = d^3f,\ \dots$$

Nếu $z = f(x, y)$ thì

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f$$

$$\dots$$

$$d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f$$

với quy ước xem $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^l f$ là $\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}$.

Vi phân cấp $n > 1$ không có dạng bất biến.

- Đạo hàm theo hướng xác định bởi vectơ đơn vị $\vec{l}$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o) = \lim_{\rho \to 0} \frac{u(M) - u(M_o)}{\rho}, \text{ trong đó } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_o} + \rho\vec{l}.$$

- Gradiên của hàm số u

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u(M_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_o)\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_o)\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_o)\vec{k}.$$

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o) = \text{ch}_{\vec{l}}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, u(M_o).$$

- Hàm số thuần nhất

Hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là thuần nhất bậc k nếu

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n),\ \forall t > 0.$$

Hàm số $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ là thuần nhất bậc k khi và chỉ khi

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf \text{ (công thức Euler).}$$

- Công thức số gia giới nội

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) = \Delta x . f'_x(x_o + \theta\Delta x, y_o + \theta\Delta y) +$$

$$+ \Delta y . f'_y(x_o + \theta\Delta x, y_o + \theta\Delta y), 0 < \theta < 1.$$

- Công thức Taylor

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) = df(x_o, y_o) + \frac{1}{2!} d^2f(x_o, y_o) + ... +$$

$$+ \frac{1}{n!} d^nf(x_o, y_o) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}f(x_o + \theta\Delta x, y_o + \theta\Delta y), 0 < \theta < 1.$$

- Cực trị của hàm số

Điều kiện cần của cực trị : Nếu hàm số $f(x, y)$ đạt cực trị tại $M_o(x_o, y_o)$ thì tại đó $p = q = 0$ ($p = f'_x(x, y)$, $q = f'_y(x, y)$).

Điều kiện đủ của cực trị : Giả sử tại $M_o(x_o, y_o)$ ta có $p = q = 0$. Nếu tại M_o, $s^2 - rt < 0$ thì M_o là điểm cực trị, đó là điểm cực đại nếu $r < 0$, là điểm cực tiểu nếu $r > 0$. Nếu tại M_o, $s^2 - rt > 0$ thì M_o không là điểm cực trị ($r = f''_{x^2}(x, y)$, $s = f''_{xy}(x, y)$, $t = f''_{y^2}(x, y)$).

- Cực trị có điều kiện

Điều kiện cần của cực trị có điều kiện : Nếu hàm số $u = f(x, y, z)$ trong đó các biến số x, y, z thỏa mãn điều kiện $g(x, y, z) = 0$ đạt cực trị tại điểm $M_o(x_o, y_o, z_o)$ thì tại đó

$$\frac{f'_x}{g'_x} = \frac{f'_y}{g'_y} = \frac{f'_z}{g'_z}.$$

Có thể tìm (x_o, y_o, z_o) bằng phương pháp nhân tử Lagrange như sau : Tìm bốn số λ, x_o, y_o, z_o thỏa mãn hệ bốn phương trình

$$\begin{cases} f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ f'_z + \lambda g'_z = 0 \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Bài tập

1. Tìm miền xác định của các hàm số sau :

a) $z = \ln xy$;   b) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

c) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$;   d) $z = \arcsin\dfrac{y-1}{x}$

e) $z = \sqrt{x\ln y}$;   f) $z = \dfrac{1}{y - x^2}$.

2. Tìm giới hạn khi $(x, y) \to (0, 0)$ của các hàm số $f(x, y)$ sau :

a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;   b) $f(x, y) = x\,\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$

c) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$;   d) $f(x, y) = \dfrac{1 + x^2 + y^2}{y^2}(1 - \cos y)$.

3. Tính đạo hàm riêng của các hàm số sau :

a) $z = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$;   b) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

c) $z = y^2\sin\dfrac{x}{y}$;   d) $z = x^{y^3}$ $(x > 0)$

e) $z = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$;   f) $z = \arcsin(x - 2y)$

g) $z = \ln\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$;   h) $z = \mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

i) $u = x^{y^2}$ $(x > 0,\ y > 0)$; j) $u = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$

k) $u = e^{xyz}\sin\dfrac{y}{z}$.

4. Khảo sát sự liên tục và sự tồn tại, liên tục của các đạo hàm riêng của các hàm số f(x, y) sau :

a) $f(x,y) = \begin{cases} x\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

5. Chứng minh rằng hàm số $z = y\ln(x^2 - y^2)$ thỏa mãn phương trình $\dfrac{1}{x}z'_x + \dfrac{1}{y}z'_y = \dfrac{z}{y^2}$.

6. Tính đạo hàm của các hàm số hợp sau đây :

a) $z = e^{u^2-2v^2}$, $u = \cos x$, $v = \sqrt{x^2+y^2}$

b) $z = \ln(u^2+v^2)$, $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$

c) $z = x^2\ln y$, $x = \dfrac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$.

7. Bằng phép đổi biến số $u = x + y$, $v = x + 2y$, tìm hàm số z(x, y) thỏa mãn phương trình

$$2z'_x - z'_y = 0.$$

8. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số :

a) $z = \sin(x^2+y^2)$; b) $z = e^x(\cos y + x\sin y)$

c) $z = \ln\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$; d) $z = \mathrm{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$

e) $u = x^{y^2z}$ $(x > 0)$.

9. Tính gần đúng

a) $\sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$; b) $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$.

10. Tính đạo hàm của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau :

a) $x^3y - y^3x = a^4$, tính y' ; b) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$, tính y'

c) $\text{arctg}\dfrac{x+y}{a} = \dfrac{y}{a}$, tính y' ; d) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \text{arctg}\dfrac{y}{x}$, tính y', y''

e) $x + y + z = e^z$, tính z'_x, z'_y

f) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, tính z'_x, z'_y.

11. $z = f(x, y)$ là hàm số ẩn xác định từ phương trình $z - x.e^{\frac{z}{y}} = 0$. Tính gần đúng f(0,02 ; 0,99).

12. Cho $u = \dfrac{x+z}{y+z}$. Tính u'_x, u'_y biết rằng z là hàm số ẩn của x, y xác định bởi phương trình

$$ze^z = xe^x + ye^y.$$

13. Tính đạo hàm của các hàm số ẩn y(x), z(x) xác định bởi hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

14. Phương trình $z^2 + \dfrac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$ xác định hàm số ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng

$$x^2 z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{1}{z}.$$

15. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau :

a) $z = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$; b) $z = x^2\ln(x+y)$

c) $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$; d) $z = \text{arctg}\dfrac{y}{x}$.

16. a) Tìm hàm số f(x, y) thỏa mãn phương trình $f''_{xy} = 0$.

b) Tìm hàm số f(x, y) thỏa mãn phương trình $f''_{x^2} = 0$.

c) Tìm hàm số u(x, y, z) thỏa mãn phương trình $u'''_{xyz} = 0$.

d) Tìm hàm số f(x, y) biết rằng $f''_{xx} = 12x^2y + 2$, $f'_y = x^4 - 30xy^5$, $f(0, 0) = 1$, $f(1, 1) = -2$.

e) Tìm hàm số u(x, y) biết rằng $u'_x = x^2 - 2xy^2 + 3$, $u'_y = y^2 - 2x^2y + 3$.

17. Chứng minh rằng hàm số $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, trong đó f là một hàm số có đạo hàm cấp hai liên tục, thỏa mãn phương trình

$$z''_{x^2} \cdot z''_{y^2} = (z''_{xy})^2.$$

18. Chứng minh rằng hàm số :

a) $u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

b) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

19. Tìm hàm số f(x, y, z) có dạng g(r), trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sao cho

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

20. Tính đạo hàm của hàm số ẩn y = y(x) xác định bởi hệ thức

$$\arcsin \sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3 - 3x^2y}{x^3 + y^3 - 3xy^2}} = a, \text{ a là hằng số.}$$

21. Chứng minh rằng nếu f(x, y) là một hàm số thuần nhất bậc 1 thì ta có

$$(f''_{xy})^2 = f''_{x^2} \cdot f''_{y^2}.$$

22. Tính đạo hàm của hàm số $u = xy^2z^3$ tại điểm $M_o(1, 2, -1)$ theo hướng xác định bởi vectơ $\overrightarrow{M_oM_1}$ với $M_1(0, 4, -3)$.

23. Tính đạo hàm của hàm số $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ theo hướng của bán kính vectơ $\vec{r}$. Khi nào đạo hàm ấy bằng $|\overrightarrow{\text{grad}}\, u|$?

24. Tính đạo hàm của hàm số $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ theo hướng của vectơ $\vec{l}$, với $\vec{l}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Khi nào thì đạo hàm ấy triệt tiêu ?

25. Cho $u = x^2y^2z^2$. Tính $\overrightarrow{\text{grad}}\, u$ và $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ tại $M_o(1, -1, 3)$ biết rằng $\vec{l}$ được xác định bởi vectơ $\overrightarrow{M_oM_1}$ với $M_1(0, 1, 1)$.

26. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{\text{grad}}(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1\overrightarrow{\text{grad}}\, u_1 + c_2\overrightarrow{\text{grad}}\, u_2$

(c_1, c_2 là hai hằng số)

b) $\overrightarrow{\text{grad}}(u_1 . u_2) = u_1 . \overrightarrow{\text{grad}}\, u_2 + u_2 . \overrightarrow{\text{grad}}\, u_1$

c) $\overrightarrow{\text{grad}}(f(u)) = f'(u) . \overrightarrow{\text{grad}}\, u$.

27. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$; b) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

c) $z = x + y - xe^y$ d) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

e) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$;

28. Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $z = x^2 - y^2$ trong miền tròn $x^2 + y^2 \leq 4$

b) $z = x^2y(4 - x - y)$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$

c) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$

d) $z = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2)$ trong miền tròn $x^2 + y^2 \leq 1$

e) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$.

29. Tìm cực trị có điều kiện :

a) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

b) $z = xy$ với điều kiện $x + y = 1$

c) $u = x + y + z$ với điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

d) $u = x^2 + y^2 + z^2$ với điều kiện $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > b > c)$.

30. Hình hộp chữ nhật nào nội tiếp trong hình cầu bán kính R có thể tích lớn nhất.

Đáp số và gợi ý

1. a) $\{(x, y) : x > 0, y > 0\} \cup \{(x, y) : x < 0, y < 0\}$.

b) Vành tròn đóng giới hạn bởi các đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

c) Miền mở nằm giữa hai đường $y = x$, $y = -x$, nằm ở bên phải trục Oy.

d) $\{(x, y) : x > 0, 1 - x \leq y \leq 1 + x\} \cup \{(x, y) : x < 0, 1 + x \leq y \leq 1 - x\}$.

e) $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 1\} \cup \{(x, y) : x \leq 0, 0 < y \leq 1\}$.

f) $\{(x, y) : y \neq x^2\}$.

2. a) Giới hạn không tồn tại : $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = 1$, $\lim\limits_{y \to 0} f(0, y) = -1$.

b) 0 ; c) 0 ; d) $\frac{1}{2}$.

3. a) $z'_x = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$, $z'_y = \dfrac{y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$.

b) $z'_x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z'_y = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}}$.

c) $z'_x = y\cos\dfrac{x}{y}$, $z'_y = 2y\sin\dfrac{x}{y} - x\cos\dfrac{x}{y}$.

d) $z'_x = y^3x^{y^3 - 1}$, $z'_y = x^{y^3}.\ln x.3y^2$.

e) $z'_x = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $z'_y = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

f) $z'_x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (x - 2y)^2}}$, $z'_y = -\dfrac{2}{\sqrt{1 - (x - 2y)^2}}$.

g) $z'_x = \mp\dfrac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z'_y = \dfrac{2x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}$.

h) $z'_x = \dfrac{y^2}{x\sqrt{x^4 - y^4}}$, $z'_y = -\dfrac{y}{\sqrt{x^4 - y^4}}$.

i) $u'_x = y^zx^{y^z - 1}$, $u'_y = x^{y^z}.\ln x.zy^{z-1}$, $u'_z = x^{y^z}.\ln x.y^z.\ln y$.

j) $u'_x = -\dfrac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}u$, $u'_y = -\dfrac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}u$, $u'_z = -\dfrac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}u$.

k) $u'_x = yze^{xyz}\sin\dfrac{y}{z}$, $u'_y = xze^{xyz}\sin\dfrac{y}{z} + e^{xyz}.\dfrac{1}{z}\cos\dfrac{y}{z}$

$u'_z = xye^{xyz}\sin\dfrac{y}{z} - e^{xyz}.\dfrac{y}{z^2}\cos\dfrac{y}{z}$.

4. a) f liên tục trên $\mathbf{R}^2$; $f'_x = \text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - \dfrac{2x^2y^2}{x^4 + y^4}$, $f'_y = \dfrac{2x^3y}{x^4 + y^4}$.

Chúng liên tục với $x \neq 0$. Cần khảo sát thêm khi $x = 0$. $f'_y(x, y)$ liên tục khắp nơi, $f'_x(x, y)$ liên tục khắp nơi trừ tại (0,0)

b) f liên tục trên $\mathbf{R}^2$, $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, nhưng f'_x, f'_y không liên tục tại (0, 0).

6. a) $z'_x = -e^{\cos^2x - 2(x^2+y^2)}.(2\cos x\sin x + 4x)$

$z'_y = -e^{\cos^2x - 2(x^2+y^2)}.4y$

b) $z'_x = \dfrac{2}{x}$, $z'_y = \dfrac{2(y^4-1)}{y(y^4+1)}$

c) $z'_u = 2\dfrac{u}{v^2}\ln(3u - 2v) + \dfrac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$

$z'_v = -2\dfrac{u^2}{v^3}\ln(3u - 2v) - \dfrac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$

7. $z(x, y) = F(x + 2y)$, F là một hàm số khả vi tùy ý.

Với phép đổi biến số, phương trình trở thành $z'_u = 0$, vậy z không phụ thuộc u, nó chỉ phụ thuộc v.

8. a) $2(xdx + ydy)\cos(x^2 + y^2)$

b) $e^x[(x\cos y - \sin y)dy + (\sin y + \cos y + x\sin y)dx]$

c) $\dfrac{2(xdy - ydx)}{x^2\sin\dfrac{2y}{x}}$

d) $\dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$

e) $y^2zx^{y^2z-1}dx + x^{y^2z}.\ln x.2yzdy + x^{y^2z}.\ln x.y^2dz$.

9. a) 1,013 ; b) 0,005.

10. a) $y' = \dfrac{y(3x^2-y^2)}{x(3y^2-x^2)}$; b) $y' = \dfrac{e^y + ye^x - ye^{xy}}{-xe^y - e^x + xe^{xy}}$

c) $y' = \dfrac{a^2}{(x+y)^2}$; d) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$, $y'' = \dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$

e) $z'_x = z'_y = \dfrac{1}{x+y+z-1}$

f) $z'_x = -\dfrac{x^2-yz}{z^2-xy}$, $z'_y = -\dfrac{y^2-xz}{z^2-xy}$.

11. 0,02.

12. $u'_x = \dfrac{1}{y+z} + \dfrac{y-x}{(y+z)^2} \cdot \dfrac{e^x(1+x)}{e^z(1+z)}$

$u'_y = -\dfrac{x+z}{(y+z)^2} + \dfrac{y-x}{(y+z)^2} \cdot \dfrac{e^y(1+y)}{e^z(1+z)}$.

13. $y' = \dfrac{z-x}{y-z}$, $z' = \dfrac{y-x}{z-y}$.

15. a) $z''_{x^2} = \dfrac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z''_{xy} = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z''_{y^2} = \dfrac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

b) $z''_{x^2} = 2\ln(x+y) + \dfrac{2x}{x+y} + \dfrac{x^2+2xy}{(x+y)^2}$

$z''_{xy} = \dfrac{2x}{x+y} - \dfrac{x^2}{(x+y)^2}$, $z''_{y^2} = -\dfrac{x^2}{(x+y)^2}$

c) $z''_{x^2} = -\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $z''_{xy} = -\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$z''_{y^2} = \dfrac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}$

d) $z''_{x^2} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $z''_{xy} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z''_{y^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

16. a) $f(x, y) = F(x) + G(y)$, F và G là hai hàm số tùy ý

b) $f(x, y) = xF(y) + G(y)$, F và G là hai hàm số tùy ý.

c) $u(x, y, z) = G(y, z) + H(x, z) + F(x, y)$, F, G, H là các hàm số tùy ý

d) $f(x, y) = x^4y - 5xy^6 + x^2 + 1$

e) $u(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{3} - x^2y^2 + 3(x + y) + C.$

19. $g(r) = -\dfrac{a}{r} + b$, (a, b là những hằng số tùy ý).

20. $y' = \dfrac{y}{x}$.

Đặt $F(x, y) = \arcsin \sqrt[3]{\dfrac{x^3 + y^3 - 3x^2y}{x^3 + y^3 - 3xy^2}} - a$, $F(x, y)$ là một hàm số thuần nhất bậc 0, nên theo công thức Euler

$$xF'_x + yF'_y = 0.$$

Mặt khác $F'_x + F'_y y' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{y}{x}$.

21. Dùng công thức Euler.

Hàm số ở bài tập 17 là một hàm số thuần nhất bậc một nên cũng thỏa mãn hệ thức này.

22. $-\dfrac{28}{3}$.

23. $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{r}} = \dfrac{2u}{r}$; $a = b = c$.

24. $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = -\dfrac{\cos(\vec{l}, \vec{r})}{r^2}$, triệt tiêu khi $\vec{l} \perp \vec{r}$.

25. $\overrightarrow{\text{grad}}\, u(M_o) = -6(-3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k})$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o) = -22 .$$

27. a) $z_{max} = 8$ tại $(2, -2)$

b) $z_{min} = 0$ tại $(-1, 1)$.

c) Không có cực trị.

d) $z_{min} = -\frac{9}{8}$ tại $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

e) $z_{min} = 0$ tại $(0, 0)$; $z_{max} = \frac{1}{e}$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

28. a) Giá trị lớn nhất là 4 tại (2, 0), (−2, 0)

Giá trị nhỏ nhất là −4 tại (0, 2), (0, −2).

b) Giá trị lớn nhất là 4 tại (2, 1)

Giá trị nhỏ nhất là −64 tại (4, 2).

c) Giá trị lớn nhất là 17 tại (1, 2)

Giá trị nhỏ nhất là −3 tại (1, 0).

d) Giá trị lớn nhất là $\frac{3}{e}$ tại (0, 1), (0, −1)

Giá trị nhỏ nhất là 0 tại (0, 0).

e) Giá trị lớn nhất là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ tại $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

Giá trị nhỏ nhất là 0 tại (0, 0).

29. a) $z_{min} = -\frac{\sqrt{2}}{a}$ tại $\left(\frac{-a}{\sqrt{2}}, \frac{-a}{\sqrt{2}}\right)$, $z_{max} = \frac{\sqrt{2}}{a}$ tại $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$.

b) $z_{max} = \frac{1}{4}$ tại $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

c) $u_{min} = 9$ tại (3, 3, 3)

d) $u_{min} = c^2$ tại $(0, 0, \pm c)$, $u_{max} = a^2$ tại $(\pm a, 0, 0)$.

30. Hình lập phương có cạnh bằng $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Chương II

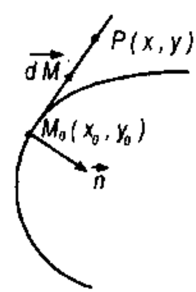
ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC

2.1. ỨNG DỤNG TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

2.1.1. Tiếp tuyến của đường tại một điểm của nó

Trong hệ tọa độ đề các vuông góc, phương trình $f(x, y) = 0$ nói chung biểu diễn một đường L. Điểm $M_o(x_o, y_o) \in L$ được gọi là *điểm chính quy nếu* $f'_x(x_o, y_o)$ và $f'_y(x_o, y_o)$ không đồng thời bằng không, là *điểm kì dị* trong trường hợp trái lại.

Giả sử M_o là một điểm chính quy của L. Có thể xem như $f'_y(x_o, y_o) \neq 0$. Theo định lí về hàm số ẩn, phương trình $f(x, y) = 0$ xác định một hàm số ẩn $y = y(x)$, có giá trị y_o khi $x = x_o$, khả vi trong một lân cận nào đó của x_o. Trong lân cận ấy ta có $f(x, y(x)) = 0$. Lấy đạo hàm hai vế đối với x tại $x = x_o$, ta được



Hình 2.1

$$f'_x(x_o, y_o) + f'_y(x_o, y_o)y'(x_o) = 0$$

hay $f'_x(x_o, y_o)dx + f'_y(x_o, y_o)dy = 0$

trong đó $dy = y'(x_o)dx$. Gọi $\vec{n}$ là vectơ có thành phần $(f'_x(x_o, y_o), f'_y(x_o, y_o))$, $\overrightarrow{dM}$ là vectơ có thành phần (dx, dy). Hệ thức trên chứng tỏ rằng $\vec{n} \cdot \overrightarrow{dM} = 0$, vậy $\vec{n} \perp \overrightarrow{dM}$, mà $\overrightarrow{dM}$ nằm trên tiếp tuyến của L tại M_o, do đó $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của L tại M_o.

Điểm $P(x, y)$ nằm trên tiếp tuyến của L tại M_o khi và chỉ khi $\overrightarrow{M_oP} \cdot \vec{n} = 0$, tức là

(2.1) $$(x - x_o)f'_x(x_o, y_o) + (y - y_o)f'_y(x_o, y_o) = 0$$

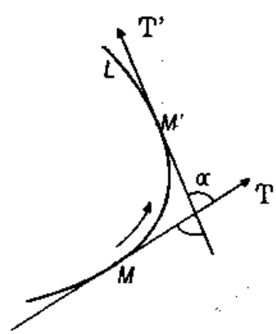
Đó là phương trình của tiếp tuyến của đường L tại M_o.

Nếu M_o là điểm kì dị của đường L thì vectơ pháp tuyến của L tại M_o là vectơ không, tiếp tuyến của L tại M_o không được xác định.

2.1.2. Độ cong

• Cho một đường L không tự giao nhau và có tiếp tuyến tại mọi điểm. Trên L chọn một chiều chạy làm chiều dương. Trên tiếp tuyến của L tại M, ta chọn một hướng ứng với chiều dương của L, gọi nó là "tiếp tuyến dương".

Định nghĩa 1. M, M' là hai điểm trên L. MT và M'T' là hai tiếp tuyến dương. Người ta gọi *độ cong trung bình* của cung $\overset{\frown}{MM'}$ là tỉ số của góc giữa hai tiếp tuyến dương MT và M'T' với độ dài của cung $\overset{\frown}{MM'}$ (hình 2.2). Kí hiệu $C_{tb}(\overset{\frown}{MM'})$. Vậy



Hình 2.2

$$C_{tb}(\overset{\frown}{MM'}) = \frac{\alpha}{\overset{\frown}{MM'}},$$

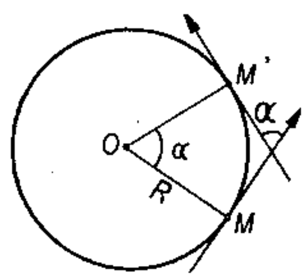
trong đó $\alpha = |(MT, M'T')|$.

Định nghĩa 2. Người ta gọi *độ cong* của đường L tại M là giới hạn, nếu có, của độ cong trung bình $C_{tb}(\overset{\frown}{MM'})$ khi M' dần tới M trên L.
Kí hiệu C(M). Vậy

$$C(M) = \lim_{M' \to M} C_{tb}(\overset{\frown}{MM'}).$$

Ví dụ 1 : Trên đường thẳng, $C_{tb}(MM')$ trên mọi đoạn MM' đều bằng không, do đó $C(M) = 0, \forall M$.

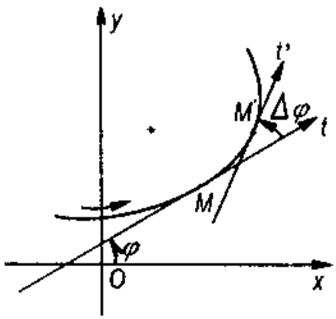
Ví dụ 2 : Trên đường tròn bán kính R, ta có (hình 2.3)



Hình 2.3

$C_{tb}(\overset{\frown}{MM'}) = \dfrac{\alpha}{\overset{\frown}{MM'}} = \dfrac{\alpha}{R\alpha} = \dfrac{1}{R}$ với mọi cung MM'. Do đó $C(M) = \dfrac{1}{R}$ $\forall M$.

• *Công thức tính*. Giả sử đường L có phương trình trong hệ tọa độ đề các vuông góc là $y = f(x)$. Kẻ các tiếp tuyến của L tại M và M' có hoành độ x và $x + \Delta x$. Gọi φ và $\varphi + \Delta\varphi$ là các góc nghiêng của chúng. Khi tiếp điểm di chuyển từ M đến M', tiếp tuyến dương quay một góc bằng $|\Delta\varphi|$, còn độ dài cung $\overset{\frown}{MM'}$ bằng $|\Delta s|$, s là hoành độ cong (hình 2.4). Do đó



Hình 2.4

$$C(M) = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|.$$

Vì $tg\varphi = y'$, nên $\varphi = arctgy'$, do đó $\dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{y''}{1 + y'^2}$. Mặt khác biểu thức của vi phân cung cho ta $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$, do đó

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Vậy

$$C(M) = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \tag{2.2}$$

Nếu L được cho bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, thì $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, do đó $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'^3(t)}$. Thế vào (2.2), ta được

$$C(M) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \tag{2.3}$$

Nếu L được cho bởi phương trình trong tọa độ cực $r = f(\varphi)$, ta viết $x = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\sin\varphi$. Xem đó là những phương trình của L theo tham số φ, ta có

$$x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi,\ y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi,$$

$$x'' = r''\cos\varphi - 2r'\sin\varphi - r\cos\varphi,\ y'' = r''\sin\varphi + 2r'\cos\varphi - r\sin\varphi,$$

thế vào (2.3) và rút gọn, ta được

$$(2.4) \qquad C(M) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

Ví dụ 1 : Tính độ cong của đường dây xích $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ $(a > 0)$ tại một điểm bất kì.

Ta có $y' = \mathrm{sh}\,\dfrac{x}{a}$, $\sqrt{1 + y'^2} = \mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{a}$, $y'' = \dfrac{1}{a}\mathrm{ch}\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{a^2}$.

Công thức (2.2) cho ta

$$C = \frac{y}{a^2} \cdot \frac{a^3}{y^3} = \frac{a}{y^2}.$$

Ví dụ 2 : Tính độ cong của đường xy–clô–it

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ (a > 0)$$

Ta có $x' = a(1 - \cos t)$, $y' = a\sin t$

$$x'' = a\sin t,\ y'' = a\cos t,$$

thế vào (2.3), ta được

$$C = \frac{|\cos t - 1|}{2\sqrt{2}a(1 - \cos t)^{3/2}} = \frac{1}{\left|4a\sin\dfrac{t}{2}\right|}.$$

Độ cong chỉ xác định tại các điểm ứng với $t \neq 2k\pi$.

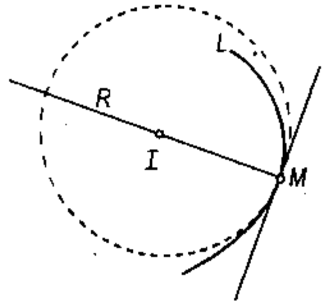
Ví dụ 3 : Xác định độ cong của đường $r = ae^{b\varphi}$ $(a > 0,\ b > 0)$

Ta có $r' = abe^{b\varphi}$, $r'' = ab^2e^{b\varphi}$. Thế vào (2.4), ta được

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}\,.\,r}.$$

2.1.3. Đường tròn chính khúc. Khúc tâm

Tại mỗi điểm M của đường L, vẽ đường pháp tuyến hướng về phía lõm của L, trên đó lấy một điểm I sao cho $MI = \frac{1}{C(M)}$ (hình 2.5). Đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{1}{C(M)}$ được gọi là *đường tròn chính khúc* của L tại M. Nó tiếp xúc với L tại M, vì có chung với L đường tiếp tuyến, và có tại M cùng độ cong $C(M) = \frac{1}{R}$ với đường L. Tâm của



Hình 2.5

đường tròn chính khúc ấy được gọi là *khúc tâm* ứng với M, bán kính của nó $R = \frac{1}{C(M)}$ được gọi là *khúc bán kính*. Đương nhiên ở lân cận M, xấp xỉ L bởi đường tròn chính khúc tốt hơn bởi đường tiếp tuyến.

Bây giờ, hãy xác định tọa độ X, Y của khúc tâm I ứng với điểm $M(x, y) \in L$. Giả sử phương trình của L là $y = f(x)$.

Pháp tuyến của L tại M có phương trình là

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x),$$

ξ, η là tọa độ những điểm chạy trên pháp tuyến ấy. Khúc tâm I nằm trên pháp tuyến ấy, nên

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x). \tag{2.5}$$

Vì MI = R nên

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 = R^2. \tag{2.6}$$

Từ (2.5) và (2.6) suy ra

$$X = x \pm \frac{y'(1 + y'^2)}{|y''|}, \; Y = y \mp \frac{1 + y'^2}{|y''|}.$$

Nếu $y'' > 0$, đường L lõm, nên $Y > y$, vậy $Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$.

Nếu $y'' < 0$, thì $Y < y$, ta có $Y = y - \frac{1 + y'^2}{|y''|} = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$.

Trong cả hai trường hợp $Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$, do đó từ (2.5) suy ra

$$X = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \tag{2.7}$$

Nếu L được cho bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, thì

$$X = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}, \quad Y = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}. \tag{2.8}$$

2.1.4. Đường túc bế. Đường thân khai

Định nghĩa 1. Người ta gọi *đường túc bế* của đường L là quỹ tích, nếu có, của các khúc tâm của đường ấy.

Như vậy (2.7) hay (2.8) cho ta phương trình tham số của đường túc bế của L.

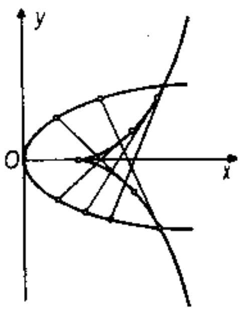
Ví dụ 1 : Tìm đường túc bế của parabôn $y^2 = 2px$ $(p > 0)$

Lấy đạo hàm hai vế đối với x, ta được $2yy' = 2p \Rightarrow y' = \frac{p}{y} \Rightarrow y'' = -\frac{py'}{y^2} = -\frac{p^2}{y^3}$. Thế vào (2.7), ta có

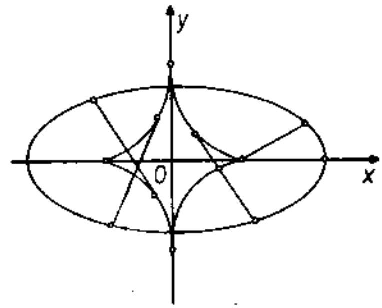
$X = 3x + p$, $Y = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}$. Có thể xem đó là phương trình của đường túc bế phải tìm theo tham số x. Khử x từ hai phương trình ấy, ta được

$$Y^2 = \frac{8}{27p}(X - p)^3,$$

đó là phương trình của parabôn bán lập phương (hình 2.6).



Hình 2.6



Hình 2.7

Ví dụ 2 : Tìm bán kính chính khúc và đường túc bế của elip $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(a > b > 0)$.

Ta có $x' = -a\sin t$, $y' = b\cos t$, $x'' = -a\cos t$, $y'' = -b\sin t$, thế vào (2.3), ta được $R = \dfrac{1}{C} = \dfrac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}$.

Công thức (2.8) cho ta

$$X = \frac{c^2}{a}\cos^3 t\,,\ Y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$$

trong đó $c^2 = a^2 - b^2$. Đó là phương trình của đường ax–trô–it lệch (hình 2.7).

Định nghĩa 2. Nếu đường L nhận Γ làm đường túc bế thì L được gọi là *đường thân khai* của Γ.

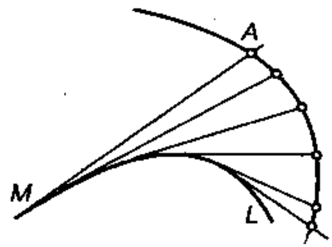
Từ hai ví dụ trên, ta thấy rằng parabôn $y^2 = 2px$ là đường thân khai của parabôn bán lập phương $y^2 = \dfrac{8}{27p}(x - p)^3$, elip $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ là đường thân khai của đường ax–trô–it lệch $x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t$.

Ta thừa nhận hai tính chất quan trọng sau đây của đường túc bế và thân khai.

Tính chất 1. Pháp tuyến tại mỗi điểm M(x, y) của đường L là tiếp tuyến của đường túc bế Γ của L tại khúc tâm I ứng với M.

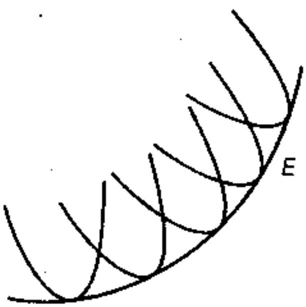
Tính chất 2. Độ dài của một cung trên đường Γ bằng trị số tuyệt đối của hiệu các khúc bán kính của đường thân khai L của nó tại hai mút của cung ấy, nếu dọc theo cung ấy khúc bán kính biến thiên đơn điệu.

Từ tính chất này suy ra rằng đường thân khai của đường L là quỹ tích của một điểm A trên nửa đường thẳng MA tiếp xúc với L tại M khi nửa đường thẳng này lăn mà không trượt trên L (hình 2.8)



Hình 2.8

2.1.5. Hình bao của một họ đường phụ thuộc một tham số

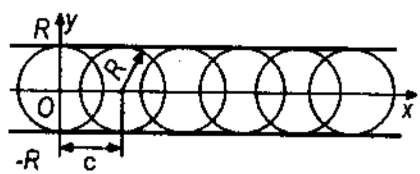


Hình 2.9

• Cho một họ đường $\mathcal{L}$ phụ thuộc một hay nhiều tham số. Nếu mọi đường của họ $\mathcal{L}$ đều tiếp xúc với một đường E và ngược lại tại mỗi điểm của đường E có một đường của họ $\mathcal{L}$ tiếp xúc với E tại điểm ấy thì E được gọi là *hình bao* của họ $\mathcal{L}$ (hình 2.9).

Ví dụ 1 : Phương trình $(x - c)^2 + y^2 = R^2$, trong đó R là một số cố định, c là một tham số, biểu diễn một họ đường tròn bán kính R có tâm trên trục Ox. Hình bao của họ ấy là hai đường thẳng $x = \pm R$ (hình 2.10)

Ví dụ 2 : Phương trình $x\cos\alpha + y\sin\alpha - 1 = 0$, trong đó α là tham số, biểu diễn một họ đường thẳng mà khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng ấy bằng 1. Hình bao của họ ấy là đường tròn tâm O bán kính bằng 1.



Hình 2.10

Ví dụ 3 : Phương trình $y - cx = 0$, trong đó c là tham số, biểu diễn một chùm đường thẳng đi qua gốc O. Hình bao của họ ấy là gốc O (đường tròn tâm O bán kính bằng 0).

Ví dụ 4 : Đường túc bế của một đường L là hình bao của họ các đường pháp tuyến của L (xem tính chất 1 của đường túc bế). Vì vậy đường túc bế của L còn được gọi là đường *pháp bao* của L.

● *Quy tắc tìm hình bao của một họ đường phụ thuộc một tham số.*

Định lí. Cho họ đường $F(x, y, c) = 0$ phụ thuộc tham số c. Nếu các đường của họ ấy không có điểm kì dị (tức là điểm tại đó $F'_x(x, y, c) = F'_y(x, y, c) = 0$ thì phương trình của hình bao E của họ ấy được xác định bằng cách khử c từ hai phương trình

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Chứng minh. Với mỗi giá trị của tham số c, có một đường L_c của họ, do đó có một tiếp điểm M_c của L_c với E. Hình bao E là quỹ tích của những điểm M_c ấy, tọa độ của chúng là những hàm số $x(c)$, $y(c)$ mà ta phải tìm. Vì điểm $M_c(x(c), y(c)) \in L_c$ nên $F(x(c), y(c), c) = 0$. Lấy đạo hàm hai vế đối với c, ta được

$$F'_x(x(c), y(c), c)x'(c) + F'_y(x(c), y(c), c)y'(c) + F'_c(x(c), y(c), c) = 0. \tag{2.10}$$

Mặt khác tại M_c các đường E và L_c tiếp xúc nhau. Hệ số góc của tiếp tuyến của E tại M_c là $k_1 = \dfrac{y'(c)}{x'(c)}$. Vì L_c không có điểm kì dị nên hệ số góc của L_c tại M_c là $k_2 = -\dfrac{F'_x(x, y, c)}{F'_y(x, y, c)}$.

Vì $k_1 = k_2$ nên ta được

$$F'_x(x(c), y(c), c)x'(c) + F'_y(x(c), y(c), c)y'(c) = 0. \tag{2.11}$$

Từ (2.10), (2.11) suy ra $F'_c(x, y, c) = 0$. Vậy tọa độ của các điểm M_c của hình bao phải thỏa mãn hệ (2.9). ■

Chú thích. Nếu các đường $F(x, y, c) = 0$ có điểm kì dị thì hệ (2.9) bao gồm cả phương trình hình bao E và quỹ tích của các điểm kì dị.

Ví dụ 1 : Tìm hình bao của họ đường thẳng

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - 1 = 0.$$

Các đường thẳng không có điểm kì dị, vậy tọa độ các điểm của hình bao thỏa mãn hệ

$$F(x, y, \alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha - 1 = 0$$

$$F'_\alpha(x, y, \alpha) = -x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0.$$

Hệ đó cho ta $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. Vậy hình bao phải tìm là đường tròn tâm O bán kính 1.

Ví dụ 2 : Tìm hình bao của họ parabôn bán lập phương $(y - c)^2 = (x - c)^3$.

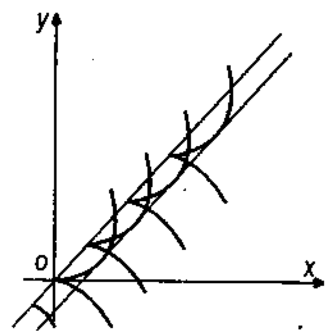
Đạo hàm hai vế theo c, ta được $2(y - c) = 3(x - c)^2$.

Thế vào phương trình của họ, ta được

$$(x - c)^3 \left[1 - \frac{9}{4}(x - c)\right] = 0$$

Nếu $x - c = 0$ thì $y - c = 0$, vậy $y = x$.

Nhưng $y = x$ là quỹ tích của những điểm kì dị của họ parabôn bán lập phương (đó là những điểm lùi).

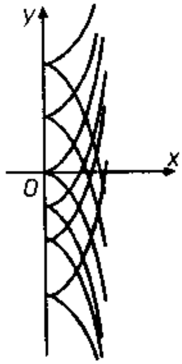


Hình 2.11

Nếu $1 - \frac{9}{4}(x - c) = 0$ hay $x - c = \frac{4}{9}$ thì $y - c = \frac{8}{27}$, do đó $x - y = \frac{4}{27}$.

Vậy hình bao phải tìm là đường thẳng $x - y = \frac{4}{27}$ (hình 2.11).

Chú thích. Giả sử ta xét họ parabôn bán lập phương $(y - c)^2 = x^3$. Đạo hàm hai vế đối với c, ta được $2(y - c) = 0$. Khử c từ hai phương trình trên, ta được $x = 0$, đó là phương



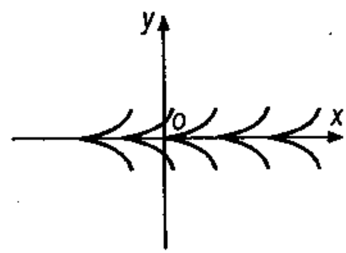
Hình 2.12

trình của quỹ tích các điểm lùi (hình 2.12). Vậy họ đường cong này không có hình bao.

Bây giờ xét họ parabôn bán lập phương $y^2 = (x - c)^3$. Đạo hàm hai vế đối với c, ta được $3(x - c)^2 = 0$. Khử c từ hai phương trình trên, ta được $y = 0$, đó là quỹ tích của các điểm lùi, đồng thời cũng là hình bao của họ đường cong (hình 2.13).

Ví dụ 3 : Xét họ quỹ đạo của viên đạn bắn từ một khẩu pháo với vận tốc v_o, phụ thuộc góc bắn α. Phương trình chuyển động của viên đạn nếu chọn trục tọa độ như ở hình 2.14 là

$$\begin{cases} x = v_o t\cos\alpha \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_o t\sin\alpha \end{cases}$$



Hình 2.13

trong đó g là gia tốc của trọng trường. Khử t từ hai phương trình ấy, ta được

$$y = x\text{tg}\alpha - \frac{g}{2v_o^2\cos^2\alpha}x^2.$$

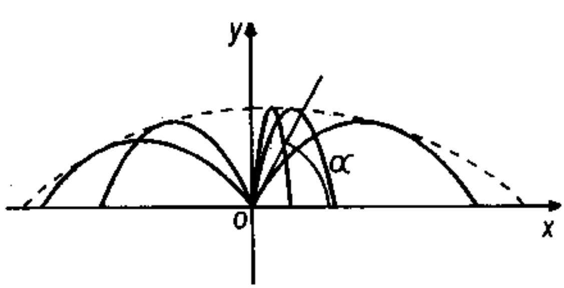
Đặt $\text{tg}\alpha = c$, ta được họ parabôn phụ thuộc tham số c :

$$y = cx - \frac{g}{2v_o^2}(1 + c^2)x^2.$$

Lấy đạo hàm hai vế đối với c, ta được

$$0 = x - \frac{gx^2}{v_o^2}c$$

$$\Rightarrow c = \frac{v_o^2}{gx}.$$



Hình 2.14

Thế vào phương trình trên, ta được

$$y = \frac{v_o^2}{2g} - \frac{g}{2v_o^2}x^2.$$

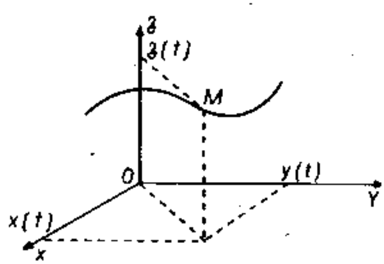
Đó là phương trình của hình bao của họ quỹ đạo, vì các đường parabôn không có điểm kì dị nên hình bao ấy là một parabôn cắt trục Ox tại $x = \pm\frac{v_o^2}{g}$, đó là tầm bắn xa nhất của viên đạn. Hình bao ấy được gọi là *parabôn an toàn*.

2.2. ỨNG DỤNG TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

2.2.1. Hàm vectơ

• Giả sử I là một khoảng trong $\mathbf{R}$. Ánh xạ $t \in I \mapsto \vec{r}(t) \in \mathbf{R}^n$ được gọi là hàm vectơ của biến số t xác định trên I. Trong phần này ta sẽ xét với n = 3. Nếu x(t), y(t), z(t) là ba thành phần của vectơ $\vec{r}(t) \in \mathbf{R}^3$, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên ba trục tọa độ, ta có

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$



Hình 2.15

Đặt $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$. Điểm M có các tọa độ là x(t), y(t), z(t) (hình 2.15). Quỹ tích của M khi t biến thiên trong I là một đường L trong $\mathbf{R}^3$, gọi là *tốc đồ* của hàm vectơ $\vec{r}(t)$. Người ta cũng nói rằng đường L có các phương trình tham số là x = x(t), y = y(t), z = z(t).

• Người ta nói rằng hàm vectơ $\vec{r}(t)$ có *giới hạn* là $\vec{a}$ khi t dần tới t_o nếu $|\vec{r}(t) - \vec{a}| \to 0$ khi $t \to t_o$, tức là nếu $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ sao cho $|t - t_o| < \delta \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{t \to t_o} \vec{r}(t) = \vec{a}$.

Hàm vectơ $\vec{r}(t)$ xác định trên I được gọi là *liên tục* tại $t_o \in$ I nếu

$$\lim_{t \to t_o} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_o).$$

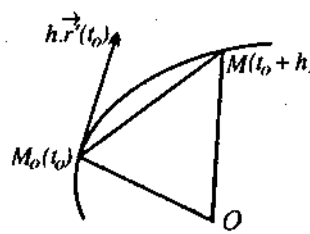
Tính liên tục của $\vec{r}(t)$ tại t_o tương đương với tính liên tục của các thành phần x(t), y(t), z(t) của nó tại t_o.

• Giả sử hàm vectơ $\vec{r}(t)$ được xác định trên I và $t_o \in$ I. Giới hạn, nếu có, của tỉ số

$$\frac{\Delta\vec{r}}{h} = \frac{\vec{r}(t_o + h) - \vec{r}(t_o)}{h}$$

khi $h \to 0$ được gọi là *đạo hàm* của $\vec{r}(t)$ tại t_o, kí hiệu là $\vec{r}'(t_o)$ hay $\dfrac{d\vec{r}(t_o)}{dt}$. Đó là một vectơ. Nếu đạo hàm $\vec{r}'(t_o)$ tồn tại, ta nói rằng hàm vectơ *khả vi* tại t_o.

Trên tốc đồ của $\vec{r}(t)$ (hình 2.16) ta thấy $\vec{r}(t_o) = \overrightarrow{OM_o}$, $\vec{r}(t_o + h) = \overrightarrow{OM}$, $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{M_oM}$. Khi $h \to 0$, M dần đến M_o trên tốc đồ, dây M_oM dần đến tiếp tuyến của tốc đồ tại M_o. Vậy $\vec{r}'(t_o)$ là vectơ tiếp tuyến của tốc đồ tại M_o. Ta có



Hình 2.16

$$\frac{\Delta\vec{r}}{h} = \frac{x(t_o + h) - x(t_o)}{h}\vec{i} + \frac{y(t_o + h) - y(t_o)}{h}\vec{j} + \frac{z(t_o + h) - z(t_o)}{h}\vec{k}$$

Do đó nếu các hàm số x(t), y(t), z(t) khả vi tại t_o thì $\vec{r}(t)$ cũng khả vi tại t và ta có

$$\vec{r}'(t_o) = x'(t_o)\vec{i} + y'(t_o)\vec{j} + z'(t_o)\vec{k}.$$

Khi h khá nhỏ ta có thể xấp xỉ vectơ $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{M_oM}$ bởi vectơ tiếp tuyến $h.\vec{r}'(t_o)$.

2.2.2 Đường

• *Tiếp tuyến và pháp diện của đường tại một điểm*

Cho đường L trong không gian có các phương trình tham số là $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Phương trình vectơ của nó là $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, M_o là một điểm trên L, nó có các tọa độ $(x(t_o), y(t_o), z(t_o))$. Ta biết rằng vectơ $\vec{r}'(t_o) = x'(t_o)\vec{i} + y'(t_o)\vec{j} + z'(t_o)\vec{k}$ nằm trên tiếp tuyến của L tại M_o. Giả sử $x'(t_o)$, $y'(t_o)$, $z'(t_o)$ không đồng thời triệt tiêu, khi ấy vectơ $\vec{r}'(t_o) \neq \vec{0}$. Điểm P(x, y, z) nằm trên tiếp tuyến của L tại M_o khi và chỉ khi vectơ $\overrightarrow{M_oP}$ đồng phương với vectơ $\vec{r}'(t_o)$, tức là

$$(2.12) \qquad \frac{X - x(t_o)}{x'(t_o)} = \frac{Y - y(t_o)}{y'(t_o)} = \frac{Z - z(t_o)}{z'(t_o)}.$$

Đó là phương trình của tiếp tuyến của L tại M_o.

Mọi đường thẳng đi qua M_o vuông góc với tiếp tuyến của L tại đó được gọi là pháp tuyến của L tại M_o. Nếu đường L có tiếp tuyến tại M_o thì nó có vô số pháp tuyến tại M_o, chúng cùng nằm trong mặt phẳng vuông góc với tiếp tuyến tại M_o, mặt phẳng ấy được gọi là *pháp diện* của đường tại M_o. Điểm P(X, Y, Z) nằm trên pháp diện ấy khi và chỉ khi $\overrightarrow{M_oP} \perp \vec{r}'(t_o)$, tức là $\overrightarrow{M_oP} \cdot \vec{r}'(t_o) = 0$, hay

$$(2.13) \quad (X - x(t_o))x'(t_o) + (Y - y(t_o))y'(t_o) + (Z - z(t_o))z'(t_o) = 0.$$

Đó là phương trình của pháp diện của đường L tại M_o.

• *Độ cong*. Cho đường L trong không gian có phương trình tham số là $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Tương tự như trong mặt phẳng, ta có công thức vi phân cung

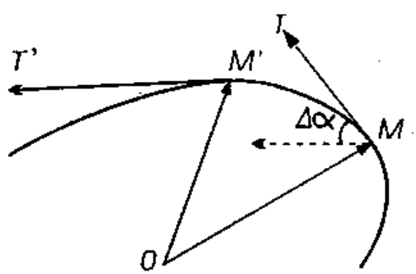
$$(2.14) \qquad ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt.$$

Giả sử đường L có tại M tiếp tuyến dương MT, tại M' tiếp tuyến dương M'T'. Đặt $\Delta\alpha = (\overrightarrow{MT}, \overrightarrow{M'T'})$ (hình 2.17), $\Delta s = \overset{\frown}{MM'}$. Giới hạn, nếu có, của tỉ số $\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ khi M' dần đến M trên đường L được gọi là *độ cong* của đường cong L tại M, kí hiệu C(M).

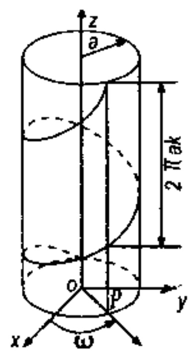
Người ta chứng minh được công thức tính độ cong của đường L như sau :

$$(2.15)\qquad C = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}.$$

• *Ví dụ.* Lập phương trình quỹ đạo của điểm M có chuyển động vừa quay tròn đều quanh trục Oz với vận tốc góc ω vừa tịnh tiến dọc theo Oz với vận tốc không đổi là ak. Quỹ đạo



Hình 2.17



Hình 2.18

này được gọi là đường đinh ốc trụ tròn xoay nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục Oz, bán kính a (hình 2.18).

Hình chiếu vuông góc trên mặt phẳng Oxy của mọi điểm M(x, y, z) của quỹ đạo đều nằm trên đường tròn tâm O bán kính a. Gọi P là hình chiếu ấy, ta có

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$$

Chiếu xuống ba trục tọa độ, ta được

$$x = a\cos\omega t,\ y = a\sin\omega t,\ z = akt,$$

trong đó tham số t là thời gian chuyển động của chất điểm. Đó là các phương trình tham số của đường đinh ốc trụ tròn xoay. Ta có

$$x'(t) = -a\omega\sin\omega t,\ y'(t) = a\omega\cos\omega t,\ z'(t) = ak.$$

Nếu ta chọn hướng dương của tiếp tuyến ứng với chiều tăng của tham số t, thì tiếp tuyến dương tại mọi điểm của đường đinh ốc làm với trục Oz một góc không đổi γ, với

$$\cos\gamma = \frac{k}{\sqrt{\omega^2 + k^2}}.$$

Phương trình của tiếp tuyến tại điểm của đường đinh ốc ứng với tham số t là

$$\frac{X - a\cos\omega t}{-a\omega\sin\omega t} = \frac{Y - a\sin\omega t}{a\omega\cos\omega t} = \frac{Z - akt}{ak}$$

Phương trình của pháp diện tại điểm đó là

$$-a\omega\sin\omega t(X - a\cos\omega t) + a\omega\cos\omega t(Y - a\sin\omega t) + ak(Z - akt) = 0$$

Vi phân cung của đường đinh ốc bằng

$$ds = a\sqrt{\omega^2 + k^2}\,dt.$$

Theo công thức (2.15), độ cong tại một điểm bất kì của đường đinh ốc bằng

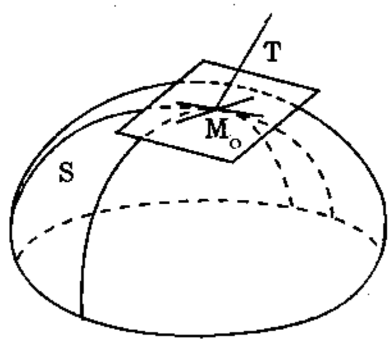
$$C = \frac{\omega}{a(\omega^2 + k^2)}.$$

Vậy độ cong của đường đinh ốc tại mọi điểm đều bằng nhau.

2.2.3. Mặt

Cho mặt S có phương trình $f(x, y, z) = 0$; M_o là một điểm trên mặt S. Đường thẳng M_oT được gọi là *tiếp tuyến* của mặt S tại M_o nếu nó là tiếp tuyến tại M_o của một đường nào đó trên mặt S đi qua M_o. Tại mỗi điểm M_o trên mặt S nói chung có vô số đường thuộc mặt S đi qua, do đó tại M_o có thể có vô số tiếp tuyến của mặt S.

Điểm M_o trên mặt S được gọi là *điểm chính quy* nếu tại đó các đạo hàm riêng $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ đều tồn tại, và không đồng thời triệt tiêu. Một điểm không chính quy được gọi là *điểm kì dị*.



Hình 2.19

Định lí. Tập hợp tất cả những tiếp tuyến của mặt S tại một điểm chính quy M_o là một mặt phẳng đi qua M_o.

Chứng minh. Giả sử L là một đường nào đó trên S đi qua M_o, các phương trình tham số của nó là

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

Điểm M_o thuộc L, tọa độ của nó là (x_o, y_o, z_o), trong đó $x_o = x(t_o)$, $y_o = y(t_o)$, $z_o = z(t_o)$. Phương trình vectơ của L là $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Vectơ $\vec{r}'(t_o) = (x'(t_o), y'(t_o), z'(t_o))$ nằm trên tiếp tuyến của L tại M_o.

Mặt khác, vì đường L nằm trên mặt S nên x(t), y(t), z(t) phải thỏa mãn phương trình của mặt, tức là

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

Lấy đạo hàm hai vế theo t, ta được

$$f'_x \cdot x'(t) + f'_y \cdot y'(t) + f'_z \cdot z'(t) = 0.$$

Tại điểm M_o (x_o, y_o, z_o) ta có

$$f'_x(M_o)x'(t_o) + f'_y(M_o)y'(t_o) + f'_z(M_o)z'(t_o) = 0.$$

Gọi $\vec{n}$ là vectơ có các tọa độ $f'_x(M_o)$, $f'_y(M_o)$, $f'_z(M_o)$. Đó là một vectơ xác định, khác $\vec{0}$, vì M_o là một điểm chính quy của mặt S. Đẳng thức trên chứng tỏ rằng $\vec{n} \cdot \dfrac{d\vec{r}(t_o)}{dt} = 0$, do đó mọi tiếp tuyến của mặt S tại M_o đều vuông góc với $\vec{n}$ tại M_o, chúng nằm trong một mặt phẳng vuông góc với $\vec{n}$ tại M_o. ■

Mặt phẳng chứa mọi tiếp tuyến của S tại M_o được gọi là *tiếp diện* của mặt S tại M_o. Đường thẳng đi qua M_o, đồng phương với $\vec{n}$ được gọi là *pháp tuyến* của mặt S tại M_o.

Phương trình của pháp tuyến của mặt S tại điểm chính quy M_o là

$$(2.16)\qquad \frac{X - x_o}{f'_x(M_o)} = \frac{Y - y_o}{f'_y(M_o)} = \frac{Z - z_o}{f'_z(M_o)}.$$

Phương trình của tiếp diện của mặt S tại M_o là

(2.17) $$f'_x(M_o)(X - x_o) + f'_y(M_o)(Y - y_o) + f'_z(M_o)(z - z_o) = 0.$$

Ví dụ : Viết phương trình của pháp tuyến và pháp diện của mặt

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

tại điểm $M_o(3, 4, 5)$.

Ta có $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \Rightarrow f'_x = 2x,\ f'_y = 2y,\ f'_z = -2z.$

Vậy phương trình của pháp tuyến của mặt tại M_o là

$$\frac{X-3}{6} = \frac{Y-4}{8} = \frac{Z-5}{-10}.$$

Phương trình của tiếp diện của mặt tại M_o là

$$6(X - 3) + 8(Y - 4) - 10(Z - 5) = 0$$

hay

$$3X + 4Y - 5Z = 0.$$

Chú thích. Ba hệ số chỉ phương của pháp tuyến của mặt $f(x, y, z) = 0$ tại $M_o(x_o, y_o, z_o)$ là

$$f'_x(M_o)\ ,\ f'_y(M_o),\ f'_z(M_o).$$

Nếu mặt được cho bởi phương trình $z = F(x, y)$ thì bằng cách đặt $f(x, y, z) = -F(x, y) + z$, ta thấy rằng ba hệ số chỉ phương của pháp tuyến của mặt tại M_o là $-p, -q, 1$, trong đó $p = z'_x(M_o),\ q = z'_y(M_o)$.

TÓM TẮT CHƯƠNG II

- Phương trình tiếp tuyến của đường $f(x, y) = 0$ tại $M(x, y)$

$$(X - x)f'_x(x, y) + (Y - y)f'_y(x, y) = 0.$$

● Công thức tính độ cong của đường phẳng tại một điểm

– Nếu đường được cho bởi phương trình $y = f(x)$ thì

$$C = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

– Nếu đường được cho bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$ thì

$$C = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

– Nếu đường được cho bởi phương trình trong tọa độ cực $r = r(\varphi)$ thì

$$C = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

● Công thức tính tọa độ của khúc tâm

– Nếu đường được cho bởi phương trình $y = f(x)$ thì

$$X = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}\ ; Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

– Nếu đường được cho bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$ thì

$$X = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''},\ Y = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}.$$

● Hình bao của họ đường phẳng $F(x, y, c) = 0$

Khử c từ hai phương trình

$$F(x, y, c) = 0,\ F'_c(x, y, c) = 0,$$

ta được phương trình của hình bao và phương trình của quỹ tích của những điểm kì dị.

● Cho đường trong không gian có phương trình tham số

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

– Phương trình tiếp tuyến của đường tại điểm M_o ứng với tham số t_o:

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)}$$

– Phương trình pháp diện của đường tại điểm M_o :

$$(X - x(t))\, x'(t) + (Y - y(t))\, y'(t) + (Z - z(t))\, z'(t) = 0.$$

– Độ cong tại M_o :

$$C = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

- Cho mặt có phương trình $f(x, y, z) = 0$

– Phương trình pháp tuyến của mặt tại $M(x, y, z)$:

$$\frac{X - x}{f'_x(M)} = \frac{Y - y}{f'_y(M)} = \frac{Z - z}{f'_z(M)}$$

– Phương trình tiếp diện của mặt tại $M(x, y, z)$:

$$(X - x)f'_x(M) + (Y - y)f'_y(M) + (Z - z)f'_z(M) = 0.$$

Bài tập

1. Tính độ cong của đường :

1) $y = -x^3$ tại điểm có hoành độ $x = \dfrac{1}{2}$

2) $xy = 1$ tại điểm $(1, 1)$

3) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ tại $(0, b)$ và $(a, 0)$

4) $x = e^t\sin t$, $y = e^t\cos t$ tại điểm ứng với $t = 1$.

2. Tính khúc bán kính của đường :

1) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ tại điểm $(0, 3)$

2) $y^2 = x^3$ tại điểm $(4, 8)$

3) $y = \ln x$ tại điểm $(1, 0)$

4) $y^2 = 2px$ tại điểm bất kì

5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ tại điểm bất kì

6) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ tại điểm bất kì

7) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ tại điểm bất kì, $(a > 0)$

8) $r = a(1 + \cos\varphi)$ tại điểm bất kì, $(a > 0)$

9) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ tại điểm bất kì, $(a > 0)$.

3. Tìm những điểm trên các đường cho dưới đây tại đó khúc bán kính có giá trị nhỏ nhất :

1) $y = \ln x$; 2) $y = e^x$.

4. Xác định khúc tâm của đường

1) $x^3 + y^4 = 2$ tại điểm $(1, 1)$;

2) $xy = 1$ tại điểm $(1, 1)$.

5. Viết phương trình đường túc bế của đường :

1) $y^2 = x + \dfrac{1}{2}$

2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

3) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

4) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ $(a > 0)$

5) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$.

6. Tìm hình bao của họ đường :

1) $y^2 = c^2(x - c)$ 2) $y = c^2(x - c)^2$

3) $y = \dfrac{x}{c} + c^2$ 4) $\dfrac{x}{c} - \dfrac{y}{c^3} = 2$

5) $(x - c)^2 + y^2 = 4c$ 6) $(x - c)^2 + (y - c)^2 = 4$

7) $cx^2 + c^2y = 1$.

7. Một đoạn thẳng di động trong mặt phẳng Oxy sao cho tổng các đoạn mà nó chắn trên hai trục tọa độ không đổi và bằng a. Tìm hình bao của họ đường thẳng ấy.

8. Chứng minh các công thức đạo hàm vectơ :

1) $\dfrac{d}{dt}(\vec{p} + \vec{q}) = \dfrac{d\vec{p}}{dt} + \dfrac{d\vec{q}}{dt}$

2) $\dfrac{d}{dt}(\alpha \cdot \vec{p}) = \alpha\dfrac{d\vec{p}}{dt} + \dfrac{d\alpha}{dt}\vec{p}$, α là hàm số khả vi của t

3) $\dfrac{d}{dt}(\vec{p} \cdot \vec{q}) = \vec{p} \cdot \dfrac{d\vec{q}}{dt} + \dfrac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{q}$

4) $\dfrac{d}{dt}(\vec{p} \wedge \vec{q}) = \vec{p} \wedge \dfrac{d\vec{q}}{dt} + \dfrac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{q}$.

9. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường :

1) $x = a.\sin^2 t$, $y = b.\sin t\cos t$, $z = c.\cos^2 t$ tại điểm ứng với $t = \dfrac{\pi}{4}$

2) $x = \dfrac{e^t \sin t}{\sqrt{2}}$, $y = 1$, $z = \dfrac{e^t \cos t}{\sqrt{2}}$ tại điểm ứng với $t = 0$

3) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ tại điểm ứng với $t = 3$.

10. Tính độ cong của đường :

1) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$

2) $x = e^{-t}\sin t$, $y = e^{-t}\cos t$, $z = e^t$

11. Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt :

1) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ tại điểm (2, 2, 3)

2) $z = 2x^2 + 4y^2$ tại điểm (2, 1, 12).

Đáp số

1. 1) $\dfrac{192}{125}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{b}{a^2}$ và $\dfrac{a}{b^2}$; 4) $\dfrac{1}{e\sqrt{2}}$

2. 1) $\frac{25}{3}$; 2) $\frac{80\sqrt{10}}{3}$, 3) $2\sqrt{2}$; 4) $p\left(1+\frac{2x}{p}\right)^{3/2}$

5) $\frac{(\varepsilon^2x^2-a^2)}{ab}$ với $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$, 6) $3a\sin t\cos t$

7) $a|t|$, 8) $\frac{4a}{3}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$, 9) $\frac{a^2}{3r}$

3. 1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\ln 2\right)$; 2) $\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4. 1) $\left(\frac{43}{68}, \frac{26}{51}\right)$; 2) $(2, 2)$.

5. 1) $Y^2 = \frac{16}{27}X^3$; 2) $X = \frac{a^2+b^2}{a^4}x^3$, $Y = \frac{a^2+b^2}{b^4}y^3$

3) $X = x + 3x^{1/3}y^{2/3}$; $Y = y + 3x^{2/3}y^{1/3}$; 4) $X^2 + Y^2 = a^2$

5) $X = -\pi a + a(\tau - \sin\tau)$, $Y = -2a + a(1-\cos\tau)$, $\tau = t - \pi$.

6. 1) $y = \pm\frac{x}{2}$; 2) $y = 0$, $y = \frac{x^4}{16}$; 3) $27x^2 = 4y^3$; 4) $27y = x^3$

5) $y^2 = 4x + 4$; 6) $(x-y)^2 = 8$; 7) $x^4 + 4y = 0$.

7. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

9. 1) $\frac{x-\frac{a}{2}}{a} = \frac{y-\frac{b}{2}}{0} = \frac{z-\frac{c}{2}}{-c}$; $ax - cz - \frac{a^2-c^2}{2} = 0$

2) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}$; $x + z - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

3) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-27}{27}$; $x + 6y + 27z - 786 = 0$.

10. 1) $\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}$.

11. 1) $x - 2 = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{3}$; $x - 4y + 3z - 3 = 0$

2) $x - 2 = y - 1 = 8(12 - z)$; $8x + 8y - z - 12 = 0$.

Chương III

TÍCH PHÂN BỘI

3.1. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

3.1.1. Trường hợp tích phân xác định

Xét tích phân xác định phụ thuộc tham số y

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx \tag{3.1}$$

trong đó hàm số f(x, y) xác định trên [a, b] × [c, d] sao cho f(x, y) khả tích theo x trên [a, b] với mọi y ∈ [c, d]. Rõ ràng tích phân ấy phụ thuộc vào tham số y. Sau đây là một số tính chất của tích phân ấy.

Định lí 3.1. Nếu hàm số f(x, y) liên tục trên [a, b] × [c, d] thì I(y) là một hàm số liên tục của y trên [c, d].

Thật vậy, lấy y ∈ (c, d), cho nó một số gia h sao cho y + h ∈ (c, d). Ta có

$$I(y + h) - I(y) = \int_a^b [f(x, y + h) - f(x, y)]\,dx .$$

Do đó

$$|I(y + h) - I(y)| \leq \int_a^b |f(x, y + h) - f(x, y)|\,dx .$$

Vì f(x, y) liên tục trên [a, b] × [c, d] nên nó cũng liên tục đều trên đó. Do đó $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, số δ này chỉ phụ thuộc ε, sao cho $|h| < \delta \Rightarrow |f(x, y + h) - f(x, y)| < \dfrac{\varepsilon}{b - a}$ $\forall x \in [a, b]$.

Do đó $|h| < \delta \Rightarrow |I(y + h) - I(y)| < \varepsilon$, vậy I(y) liên tục tại $y \in (c, d)$. Dễ thấy rằng I(y) cũng liên tục tại y = c và y = d.

Định lí 3.2. Nếu hàm số f(x, y) liên tục trên [a, b] × [c, d] thì

$$\int_c^d I(y)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right) dx. \tag{3.2}$$

Công thức (3.2) có thể viết là

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right) dx. \tag{3.2'}$$

Đây là công thức đổi thứ tự tích phân khi tính tích phân kép, sẽ được chứng minh ở phần tích phân kép.

Đó là định lí về lấy tích phân dưới dấu tích phân.

Định lí 3.3. Giả sử hàm số f(x, y) liên tục theo x trên [a, b] với mọi y không đổi trong [c, d] và giả sử đạo hàm riêng $f'_y(x, y)$ liên tục trên [a, b] × [c, d]. Khi đó ta có

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)\,dx \tag{3.3}$$

(định lí về lấy đạo hàm dưới dấu tích phân).

Thật vậy, vì f(x, y) liên tục theo x trên [a, b] với y không đổi thuộc [c, d] nên các tích phân $\int_a^b f(x, y + h)\,dx$, $\int_a^b f(x, y)\,dx$ tồn tại. Xét

$$\frac{I(y + h) - I(y)}{h} = \int_a^b \frac{f(x,y + h) - f(x,y)}{h}\,dx.$$

Áp dụng định lí số gia giới nội vào biểu thức dưới dấu tích phân, ta được

$$\frac{I(y+h) - I(y)}{h} = \int_a^b f'_y(x, y + \theta h)\, dx$$

trong đó $0 < \theta < 1$. Khi $h \to 0$ thì $\theta h \to 0$, do đó $f'_y(x, y + \theta h) \to f'_y(x, y)$ vì $f'_y(x, y)$ liên tục theo giả thiết. Lập luận như trong chứng minh định lí 1, ta có thể làm cho

$$|f'_y(x, y + \theta h) - f'_y(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\ \forall x \in [a, b]$$

miễn là h khá nhỏ. Do đó

$$\lim_{h \to 0} \frac{I(y+h) - I(y)}{h} = \int_a^b f'_y(x, y)\, dx \ ■$$

Ví dụ 1 : Tính $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \ (0 < a < b)$.

Vì $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$ nên $I = \int_0^1 (\int_a^b x^y dy)\, dx$. Theo định lí 3.2 ta có

$$I = \int_a^b (\int_0^1 x^y dx)\, dy = \int_a^b \left(\frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) dy =$$

$$= \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

Ví dụ 2 : Xét $I(y) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{1}{y}$ với $y \neq 0$.

Lấy đạo hàm hai vế đối với y, ta có

$$I'(y) = -2y \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{1}{y^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{y} - \frac{1}{y(1 + y^2)}.$$

Từ đó suy ra rằng với $y \neq 0$ ta có

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2y^3}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2(1+y^2)}.$$

Chú thích. Bây giờ xét tích phân xác định phụ thuộc tham số y sau đây

$$(3.4) \qquad I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx.$$

trong đó hàm số $f(x, y)$ xác định trên $[a, b] \times [c, d]$, các hàm số $a(y)$, $b(y)$ xác định trên $[c, d]$ và thỏa mãn

$$(3.5) \qquad a \leqslant a(y) \leqslant b,\ a \leqslant b(y) \leqslant b,\ \forall y \in [c, d].$$

Có thể chứng minh được các kết quả sau :

- *Nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$, các hàm số $a(y)$, $b(y)$ liên tục trên $[c, d]$ và thỏa mãn điều kiện (3.5) thì $I(y)$ là một hàm số liên tục đối với y trên $[c, d]$.*

- *Nếu ngoài ra hàm số $f(x, y)$ có đạo hàm riêng $f'_y(x, y)$ liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ và nếu các hàm số $a(y)$, $b(y)$ khả vi trên $[c, d]$ thì hàm số $I(y)$ khả vi theo $y \in [c, d]$ và ta có*

$$(3.6) \qquad I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)\,dx + f(b(y), y)b'(y) - f(a(y), y)a'(y).$$

3.1.2. Trường hợp tích phân suy rộng

Xét tích phân suy rộng phụ thuộc tham số y

$$(3.7) \qquad I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$$

trong đó hàm số $f(x,y)$ xác định trên $[a, +\infty) \times [c, d]$ sao cho tích phân suy rộng (3. 7) hội tụ với mọi $y \in [c, d]$. Các khái niệm và kết quả trình bày ở đây cũng có thể áp dụng một cách thích hợp cho tích phân suy rộng $\int_a^b f(x, y)dx$, trong đó $f \to \infty$ khi $x \to a$ hay $x \to b$.

Ở đây ta gặp những tình huống tương tự như khi khảo sát các chuỗi hàm số. Chẳng hạn điều kiện f(x,y) liên tục chưa đủ để I(y) liên tục theo y.

• *Khái niệm tích phân suy rộng hội tụ đều* : Trước hết ta nhắc lại rằng tích phân suy rộng (3.7) hội tụ nếu

$$\lim_{b \to +\infty} I_b(y) = I(y)$$

trong đó $I_b(y) = \int_a^b f(x, y)dx$, với $b > a$, tức là $\forall \varepsilon > 0$, $\exists B > 0$ sao cho

$$b > B \Rightarrow |\ I(y) - I_b(y)\ | < \varepsilon \text{ hay } \left| \int_b^{+\infty} f(x, y)dx \right| < \varepsilon.$$

Số B nói chung phụ thuộc ε và $y \in [c, d]$. Ta nói rằng tích phân suy rộng (3.7) *hội tụ đều đối với* $y \in [c, d]$ nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists B > 0$, số B chỉ phụ thuộc ε, sao cho

$$b > B \Rightarrow \left| \int_b^{+\infty} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon,\ \forall y \in [c, d].$$

Định lí sau cho ta một điều kiện đủ để tích phân suy rộng (3.7) hội tụ đều đối với y

Định lí 3.4. Nếu ta có $\forall\ (x,y) \in [a, +\infty) \times [c, d]$

$$|\ f(x, y)\ | \leqslant g(x)$$

và nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì tích phân suy rộng (3.7) hội tụ đều đối với* $y \in [c, d]$.

Thật vậy, ta có

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y)dx \right| \leqslant \int_b^{+\infty} \left| f(x, y) \right| dx \leqslant \int_b^{+\infty} g(x)dx.$$

Vì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ theo giả thiết nên $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ B > 0$ sao cho $b > B \Rightarrow \int_b^{+\infty} g(x)\ dx < \varepsilon$, số B chỉ phụ thuộc ε. Do đó $b > B$ $\Rightarrow \left|\int_b^{+\infty} f(x, y)dx\right| < \varepsilon$, vậy tích phân suy rộng (3.7) hội tụ đều đối với $y \in [c, d]$.

Ví dụ : Tích phân suy rộng $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1 + x^2 + y^2} dx$ hội tụ đều đối với $y \in \mathbf{R}$ vì $\left|\frac{\cos xy}{1+x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ và tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ hội tụ.

• ***Tính chất của tích phân suy rộng hội tụ đều***

Định lí 3.5. *Nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trên $[a, +\infty) \times [c, d]$ và nếu tích phân suy rộng (3.7) hội tụ đều đối với $y \in [c, d]$ thì $I(y)$ là một hàm số liên tục trên $[c, d]$.*

Thật vậy, lấy $y \in [c, d]$, cho nó một số gia h sao cho $y + h \in [c, d]$. Ta có

$$I(y + h) - I(y) = \int_a^{+\infty} [f(x, y + h) - f(x,y)]\, dx =$$

$$= \int_a^b [f(x, y + h) - f(x, y)]dx + \int_b^{+\infty} f(x, y + h)dx - \int_b^{+\infty} f(x, y)dx.$$

Đặt I_1, I_2, I_3 lần lượt là ba tích phân ở vế phải. Ta có

$$|I(y + h) - I(y)| \leqslant |I_1| + |I_2| + |I_3|.$$

Vì tích phân suy rộng (3.7) hội tụ đều đối với $y \in [c, d]$ nên $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\ B > 0$, số B chỉ phụ thuộc ε sao cho $b > B \Rightarrow$ $|I_3| < \frac{\varepsilon}{3}$ và $|I_2| < \frac{\varepsilon}{3}$, điều này đúng với mọi h khá nhỏ. Với b đã xác định trên, $\int_a^b f(x, y)dx$ là một tích phân xác định phụ thuộc tham số y. Theo định lí 3.1 tích phân ấy là một hàm số liên tục đối với y, vì vậy $\exists \delta > 0$ sao cho $|h| < \delta \Rightarrow |I_1| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Tóm lại

$$|I(y + h) - I(y)| < \varepsilon$$

nếu $|h| < \delta$, vậy I(y) liên tục trên [c, d]. ■

Định lí 3.6. Nếu hàm số f(x,y) liên tục trên $[a, +\infty) \times [c, d]$ và nếu tích phân suy rộng (3.7) hội tụ đều đối với $y \in [c, d]$ thì ta có

$$\int_c^d I(y)dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx \tag{3.8}$$

(định lí lấy tích phân dưới dấu tích phân).

Chứng minh. Ta có $\forall\ b > a$

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy + \int_c^d \left(\int_b^{+\infty} f(x, y)dx \right) dy.$$

Nhưng theo định lí 3.2, ta có

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

Do đó

$$\left| \int_c^d I(y)dy - \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx \right| \leqslant \int_c^d \left| \int_b^{+\infty} f(x, y)\, dx \right| dy.$$

Vì tích phân suy rộng (3.7) hội tụ đều đối với $y \in [c, d]$, nên $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ B > 0$, số B chỉ phụ thuộc ε, sao cho

$$b > B \Rightarrow \left| \int_b^{+\infty} f(x, y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{d - c}, \ \forall y \in [c, d]$$

$$\Rightarrow \int_c^d \left| \int_b^{+\infty} f(x, y)dx \right| dy < \varepsilon.$$

Như vậy $b > B \Rightarrow \left|\int\limits_c^d I(y)dy - \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)dy\right)dx\right| < \varepsilon$, đẳng thức (3.8) đã được chứng minh. ■

Định lí 3.7. Giả sử f(x,y) xác định trên $[a, +\infty) \times [c, d]$ sao cho hàm số f(x,y) liên tục đối với x trên $[a, +\infty)$ với mọi y không đổi thuộc [c, d] và $f'_y(x,y)$ liên tục trên $[a, +\infty) \times [c, d]$. Nếu tích phân suy rộng (3.7) hội tụ và nếu tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx$ hội tụ đều đối với $y \in [c, d]$ thì ta có

$$(3.9) \qquad I'(y) = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx$$

(định lí lấy đạo hàm dưới dấu tích phân).

Thật vậy, áp dụng định lí 3.6 vào hàm số $f'_y(x,y)$ và thay d bởi một giá trị y nào đó, $c \leqslant y \leqslant d$, ta có

$$\int\limits_c^y \left(\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx\right)dy = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^y f'_y(x, y)dy\right)dx =$$

$$\int\limits_a^{+\infty} \left(f(x, y)\Big|_{y=c}^{y=y}\right) dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x, c)dx.$$

Lấy đạo hàm vế đầu và vế cuối đối với y. Đạo hàm đối với y của vế cuối bằng $I'(y)$, còn đạo hàm đối với y của vế đầu bằng $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx$, vì biểu thức ấy liên tục đối với y.

Đẳng thức (3.9) đã được chứng minh. ■

Ví dụ 1 : Xét hàm số

$$I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xy}}{1+x^2}\, dx \text{ với } y \geqslant 0.$$

Đặt $f(x, y) = \dfrac{e^{-xy}}{1 + x^2}$, đó là một hàm số liên tục với $(x,y) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$. Ta lại có $|f(x, y)| \leqslant \dfrac{1}{1 + x^2}$, mà tích phân suy rộng $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$ hội tụ, nên theo định lí 3.4, I(y) hội tụ đều đối với $y \in [0, d]$, $\forall d > 0$. Do đó theo định lí 3.5, I(y) là một hàm số liên tục trên $[0, +\infty)$.

Ta lại có $f'_y(x,y) = -x \frac{e^{-xy}}{1+x^2}$. Ta có $\forall x \geq 0$, $\forall y \geq a > 0$,

$|f'_y(x,y)| \leq \frac{1}{2} e^{-ax}$, mà tích phân suy rộng $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ hội tụ nên tích phân suy rộng $\int_0^{+\infty} f'_y(x, y)dx$ hội tụ đều đối với $y \geq 0$. Theo định lí 3.7 ta có $\forall y \geq a > 0$

$$I'(y) = -\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-xy}}{1+x^2} dx.$$

Ví dụ 2 : Xét hàm số gamma xác định bởi

$$\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} x^{y-1}e^{-x}dx.$$

Đặt $f(x,y) = x^{y-1}e^{-x}$. Có thể viết

$$\Gamma(y) = \int_0^1 x^{y-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{y-1}e^{-x}\,dx = \Gamma_1(y) + \Gamma_2(y).$$

Với $0 < x \leq 1$, ta có $0 \leq f(x, y) \leq x^{y-1} = \frac{1}{x^{1-y}}$. Do đó $\Gamma_1(y)$ hội tụ nếu $1 - y < 1$, tức là $y > 0$.

Vì $x^2f(x, y) = x^{y+1}e^{-x} \to 0$ khi $x \to +\infty$, nên với x đủ lớn ta có

$$0 \leq f(x, y) \leq \frac{C}{x^2}.$$

Nhưng tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{C}{x^2} dx$ hội tụ, nên $\Gamma_2(y)$ hội tụ. Tóm lại hàm số $\Gamma(y)$ được xác định $\forall y > 0$.

Ta có $\forall x \in (0, 1]$, $\forall y \geqslant a > 0$

$$0 \leqslant x^{y-1}e^{-x} \leqslant x^{a-1},$$

mà tích phân $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1-a}}$ hội tụ, nên theo định lí 3.4, $\Gamma_1(y)$ hội tụ đều đối với $y \in [a, +\infty)$, $\forall a > 0$.

Ta có $\forall x \in [1, +\infty]$, $\forall y \in [a, b]$ với $0 < a < b$

$$0 < x^{y-1}e^{-x} \leqslant x^{b-1}e^{-x},$$

mà tích phân $\int\limits_1^{+\infty} x^{b-1}e^{-x}dx$ hội tụ, nên $\Gamma_2(y)$ hội tụ đều đối với $y \in [a, b]$. Tóm lại $\Gamma(y)$ hội tụ đều đối với $y \in [a, b]$, $\forall b > a > 0$. Vì vậy hàm số $\Gamma(y)$ liên tục $\forall y > 0$.

Ta lại có

$$f'_y(x,y) = x^{y-1}.\ln x.\ e^{-x}.$$

Tương tự như trên có thể chứng minh rằng tích phân

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{y-1}.\ln x.e^{-x}dx$$

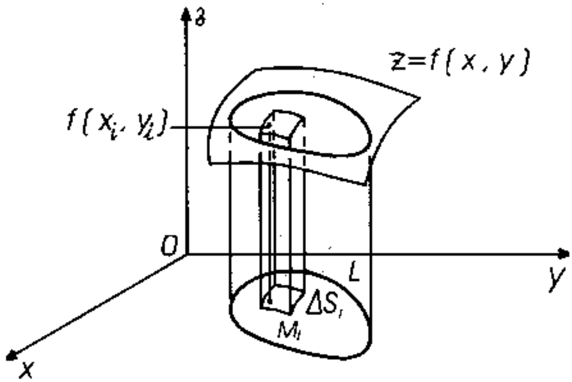
hội tụ đều đối với $y \in [a, +\infty)$, $\forall a > 0$, do đó ta có $\forall y \in [a, +\infty)$, $\forall a > 0$

$$\Gamma'(y) = \int\limits_0^{+\infty} x^{y-1}.\ln x.e^{-x}dx.$$

3.2. TÍCH PHÂN KÉP

3.2.1. Khái niệm tích phân kép

• *Bài toán thể tích của vật thể hình trụ.* Giả sử $z = f(x,y)$ là một hàm số xác định, liên tục, không âm trong một miền D đóng, bị chặn, có biên L trong mặt phẳng Oxy. Hãy tính thể tích của vật thể hình trụ giới hạn bởi mặt phẳng Oxy, mặt $z = f(x,y)$ và mặt trụ có đường sinh song song với Oz tựa trên L (hình 3.1).



Hình 3.1

Chia miền D một cách tùy ý thành n mảnh nhỏ. Gọi tên và cả diện tích của các mảnh đó là ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n. Lấy mỗi mảnh nhỏ ấy làm đáy, dựng vật thể hình trụ mà mặt xung quanh có đường sinh song song với Oz và về phía trên giới hạn bởi mặt $z = f(x,y)$. Như vậy vật thể hình trụ đang xét được chia thành n vật thể hình trụ nhỏ. Trong mỗi mảnh nhỏ ΔS_i, lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i)$. Tích $f(x_i, y_i)\ \Delta S_i$ bằng thể tích của hình trụ thẳng có đáy ΔS_i và chiều cao $f(x_i, y_i)$, nó khác rất ít thể tích ΔV_i của vật thể hình trụ nhỏ thứ i nếu mảnh ΔS_i có đường kính khá nhỏ, vì hàm số f(x, y) liên tục. Vậy có thể xem thể tích V của vật thể hình trụ xấp xỉ bằng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$. Phép tính xấp xỉ này càng chính xác nếu n càng lớn và các ΔS_i có đường kính càng nhỏ. Do đó thể tích V của vật thể hình trụ đang xét được định nghĩa bằng giới hạn, nếu có, của tổng trên khi $n \to \infty$ sao cho đường kính lớn nhất trong các đường kính d_i của các mảnh ΔS_i dần tới 0, giới hạn ấy không phụ thuộc cách chia miền D thành các mảnh nhỏ, cũng như cách chọn điểm M_i trong ΔS_i. Đường kính của một miền bị chặn là khoảng cách lớn nhất giữa các điểm trên biên của miền ấy.

• *Định nghĩa tích phân kép*. Cho hàm số f(x,y) xác định trong một miền đóng, bị chặn D. Chia miền D một cách tùy ý thành n mảnh nhỏ. Gọi các mảnh đó và cả diện tích của chúng là ΔS_1, ΔS_2, ΔS_3,..., ΔS_n. Trong mỗi mảnh ΔS_i, lấy một điểm tùy ý M_i (x_i, y_i). Tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

được gọi là *tổng tích phân* của hàm số f(x,y) trong miền D.

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$ mà I_n dần tới một giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách lấy điểm M_i trong mỗi mảnh ΔS_i, thì giới hạn ấy được gọi là *tích phân kép* của hàm số f(x,y) trong miền D và được kí hiệu là

$$\iint_D f(x, y)dS. \tag{3.10}$$

D được gọi là *miền lấy tích phân*, f được gọi là *hàm dưới dấu tích phân*, dS được gọi là *yếu tố diện tích*. Nếu tích phân (3.10) tồn tại, ta nói rằng hàm số f(x,y) *khả tích* trong miền D.

Người ta chứng minh được rằng *nếu hàm số f(x, y) liên tục trong miền bị chặn, đóng D thì nó khả tích trong miền ấy.*

Nếu f(x,y) liên tục, không âm $\forall$ (x,y) $\in$ D thì tích phân kép (3.10) bằng thể tích vật thể hình trụ xét ở trên. Vậy :

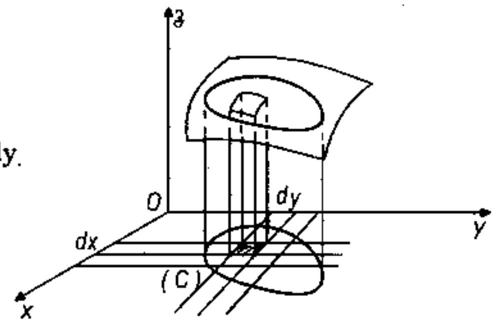
$$V = \iint_D f(x, y)dS,$$

Nếu $f(x,y) \equiv 1$, $\forall(x,y) \in D$ thì tích phân kép (3.10) bằng diện tích S của miền D

$$\iint_D dS = S,$$

Chú thích. Vì tích phân kép không phụ thuộc cách chia miền D thành các mảnh nhỏ như đã nêu trong định nghĩa, ta có thể chia D, bởi hai họ đường thẳng song song với các trục tọa độ (hình 3.2). Do đó $dS = dxdy$ và có thể viết :

$$\iint\limits_D f(x, y)dS = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$



Hình 3.2

• ***Tính chất của tích phân kép***

Tích phân kép có những tính chất tương tự như tích phân xác định sau đây, với giả thiết rằng các tích phân có mặt trong các tính chất ấy đều tồn tại

1) $\iint\limits_D [f(x, y) + g(x, y)]dxdy = \iint\limits_D f(x, y)dxdy + \iint\limits_D g(x, y)dxdy.$

2) $\iint\limits_D kf(x, y)dxdy = k\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ (k là hằng số).

3) Nếu miền D có thể chia thành hai miền D_1, D_2 không dẫm lên nhau thì

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy$$

4) Nếu $f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in D$ thì

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x, y)dxdy.$$

5) Nếu $m \leq f(x,y) \leq M$, $\forall(x,y) \in D$, m và M là hằng số, thì

$$mS \leq \iint\limits_D f(x, y)dxdy \leq MS,$$

S là diện tích của miền D.

6) Nếu f(x,y) liên tục trong miền đóng, bị chặn D thì trong D có ít nhất một điểm $(\overline{x}, \overline{y})$ sao cho

$$\iint_D f(x, y)dxdy = f(\overline{x}, \overline{y}) \,.\, S, \text{ S là diện tích của miền D}$$

(định lí về giá trị trung bình).

● *Điều kiện khả tích*

Đặt

$$m_i = \inf_{(x,y)\in\Delta S_i} f(x, y),\ M_i = \sup_{(x,y)\in\Delta S_i} f(x, y).$$

Các tổng

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i,\ \sigma = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i$$

theo thứ tự gọi là tổng Darboux dưới, tổng Darboux trên của hàm số f ứng với cách chia miền D. Cũng như đối với hàm số một biến số, nếu phép chia miền D trở nên mịn hơn (tức là mỗi mảnh của phép chia sau đều nằm trong một mảnh nào đó của phép chia trước) thì s tăng lên, σ giảm xuống. Đặt

$$I_* = \sup\{s\},\ I^* = \inf\{\sigma\}.$$

Ta có

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant \sigma.$$

Định lí 3.8. Điều kiện cần và đủ để hàm số f(x, y) khả tích trên miền D là

$$\lim_{\max d_i \to 0} (\sigma - s) = 0.$$

Hệ quả. Nếu hàm số f(x, y) liên tục trong một miền bị chặn, đóng D thì nó khả tích trong miền ấy.

3.2.2. Cách tính tích phân kép trong hệ tọa độ đề các

● Miền lấy tích phân là hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ

Định lí 3.9. (Fubini). Giả sử D = [a, b] × [c, d] *và giả sử* f : D → **R** *là hàm số khả tích trên* D. *Khi ấy :*

a) *Nếu* $\forall x \in [a, b]$, *hàm số* $y \mapsto f(x, y)$ *khả tích trên* $[c, d]$ *thì hàm số*

$$x \mapsto I(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

khả tích trên $[a, b]$ *và*

$$(3.11) \qquad \iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx$$

b) *Nếu* $\forall y \in [c, d]$, *hàm số* $x \mapsto f(x, y)$ *khả tích trên* $[a, b]$ *thì hàm số*

$$y \mapsto J(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

khả tích trên $[c, d]$ *và*

$$(3.12) \qquad \iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d J(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right)dy.$$

Chứng minh. Ta chứng minh a) chia các đoạn $[a, b]$ và $[c, d]$ bởi các điểm

$$a = x_o < x_1 < \dots < x_n = b,$$

$$c = y_o < y_1 < \dots < y_m = d.$$

Đặt

$\Delta x_i = [x_i, x_{i+1}]$, $\Delta y_k = [y_k, y_{k+1}]$,

$D_{ik} = \Delta x_i \times \Delta y_k$, $i = 0, 1, \dots, n-1$; $k = 0, 1, \dots, m-1$

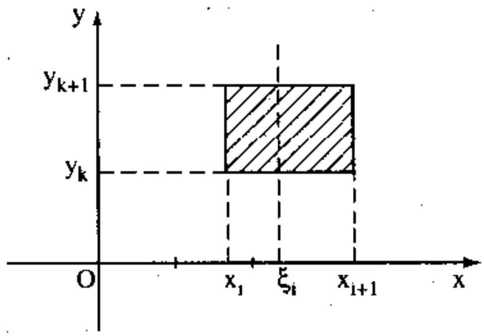
$$m_{ik} = \inf_{(x,y)\in D_{ik}} f(x, y), \; M_{ik} = \sup_{(x,y)\in D_{ik}} f(x, y).$$

Ta có $\forall (x, y) \in D_{ik}$,

$$m_{ik} \leqslant f(x, y) \leqslant M_{ik}, \; \forall (x, y) \in D_{ik}$$

Lấy $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, ta có

$$m_{ik}\Delta y_k \leqslant \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)dy \leqslant M_{ik}\Delta y_k.$$



Hình 3.3

Lấy tổng theo k từ 0 đến m − 1 cả ba vế, ta được

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k \leqslant \int_c^d f(\xi_i, y)dy \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\Delta y_k .$$

Tích phân ở giữa bằng $I(\xi_i)$. Nhân cả ba vế với Δx_i rồi lấy tổng theo i từ 0 đến n − 1, ta được

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\Delta y_k .$$

Vế đầu và vế cuối theo thứ tự là tổng Darboux dưới s, tổng Darboux trên S, vế giữa là tổng tích phân của hàm số I(x). Vì f(x, y) khả tích trên D nên khi $\max\Delta x_i \to 0$, $\max\Delta y_k \to 0$, s và S cùng dần tới $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$. Vậy

$$\lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i = \iint\limits_D f(x, y)dxdy,$$

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

b) Được chứng minh tương tự.

Hệ quả. Nếu f(x, y) *liên tục trên* D = [a, b] × [c, d] *thì*

(3.13) $$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

Thật vậy, nếu f(x, y) liên tục trên D thì $\forall x \in [a, b]$, hàm số $y \mapsto f(x, y)$ liên tục do đó khả tích trên [c, d], vì vậy ta có (3.11). Cũng vậy ta có (3.12). So sánh chúng, ta được (3.13).

Công thức (3.13) là công thức đổi thứ tự tích phân.

Ví dụ. Tính $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, $D = [1, 2]^2$.

Vì $\frac{1}{(x+y)^2}$ liên tục trên D, nên

$$I = \int_1^2 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}.$$

Nhưng

$$\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

Do đó

$$I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \ln\frac{x+1}{x+2}\Big|_1^2 = \ln\frac{9}{8}.$$

Chú thích. Nếu $f(x, y) = f_1(x).f_2(y)$, ta có

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f_1(x)f_2(y)dy =$$

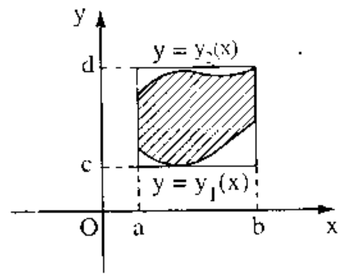
$$= \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_c^d f_2(y)dy.$$

• ***Miền lấy tích phân là miền bất kì bị chặn***

Định lí 3.10. Giả sử $D = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$, y_1 *và* y_2 *là hai hàm số khả tích trên* [a, b], $y_1(x) \leqslant y_2(x)$, $\forall x \in [a, b]$. *Giả sử* f *là một hàm số khả tích trên* D. *Nếu* $\forall x \in [a, b]$, *hàm số* $y \mapsto f(x, y)$ *khả tích trên đoạn* $[y_1(x), y_2(x)]$, *thì hàm số* $x \mapsto I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy$ *khả tích trên* [a, b] *và*

$$(3.14)\qquad \iint_D f(x,\ y)dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b \Big(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)dy\Big)dx$$

Chứng minh. Vì y_1, y_2 khả tích trên $[a,\ b]$ nên tồn tại hai số c, d sao cho $y_1(x) \geqslant c$, $y_2(x) \leqslant d$, $\forall x \in [a,\ b]$. Do đó D là một tập con của hình chữ nhật $Q = [a,\ b] \times [c,\ d]$. Đặt



Hình 3.4

$$F(x,\ y) = \begin{cases} f(x,\ y) & \text{nếu } (x,\ y) \in D \\ 0 & \text{nếu } (x,\ y) \in Q \setminus D \end{cases}$$

Rõ ràng hàm F khả tích trên hình chữ nhật Q và

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \iint_Q F(x,\ y)dxdy$$

Theo định lí 3.9 ta có

$$\iint_Q F(x,\ y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d F(x,\ y)dy.$$

Nhưng

$$\int_c^d F(x,\ y)dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)dy$$

Do đó

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)dy\Big)dx$$

Hệ quả. Giả sử $D = \{(x,\ y) : a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$, y_1 *và* y_2 *là hai hàm số liên tục trên* $[a,\ b]$. *Nếu* f *là một hàm số liên tục trên* D *thì ta có*

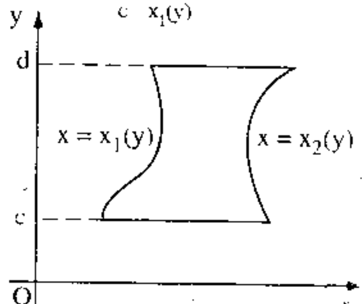
$$(3.14)\qquad \iint_D f(x,\ y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)dy\Big)dx$$

Định lí 3.11. Giả sử $D = \{(x,\ y) : c \leqslant y \leqslant d,\ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)\}$, x_1 *và* x_2 *là hai hàm số khả tích trên* $[c,\ d]$, $x_1(y) \leqslant x_2(y)\ \forall y \in [c,\ d]$.

Giả sử f *là một hàm số khả tích trên* D. *Nếu* $\forall y \in [c, d]$, *hàm số* $x \mapsto f(x, y)$ *khả tích trên đoạn* $[x_1(y), x_2(y)]$, *thì hàm số* $y \mapsto J(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx$ *khả tích trên* $[c, d]$ *và ta có*

$$(3.15) \qquad \iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d J(y)dy = \int_c^d \Big(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx\Big)dy$$

Chứng minh tương tự như định lí 3.10.

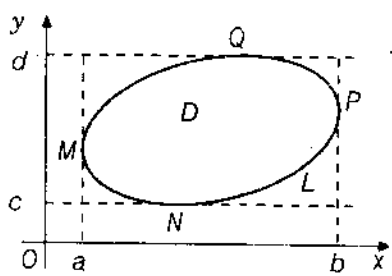


Hình 3.5

Hệ quả. Giả sử $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d,\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$, x_1 *và* x_2 *là hai hàm số liên tục trên* $[c, d]$. *Nếu* f *là một hàm số liên tục trên* D *thì ta có*

$$(3.15) \qquad \iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \Big(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx\Big)\,dy$$

Chú thích. Giả sử biên L của miền D bị mỗi đường thẳng song song với một trong hai trục tọa độ cắt ở nhiều nhất hai điểm. Dựng hình chữ nhật nhỏ nhất có các cạnh song song với các trục tọa độ chứa miền D (hình 3.6). Giả sử hình chữ nhật ấy là $[a, b] \times [c, d]$. Gọi M, N, P, Q là giao điểm của L với biên của hình chữ nhật. Các điểm M, P chia L thành hai cung $\overset{\frown}{MNP}$, $\overset{\frown}{MQP}$ có phương trình theo thứ tự là $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$. Các điểm N, Q chia L thành hai cung $\overset{\frown}{NMQ}$, $\overset{\frown}{NPQ}$ có phương trình theo thứ tự là $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$. Nếu f liên tục trên D, ta có thể tính $\iint_D f(x, y)dxdy$ theo công thức (3.14) hoặc (3.15). Ta có :



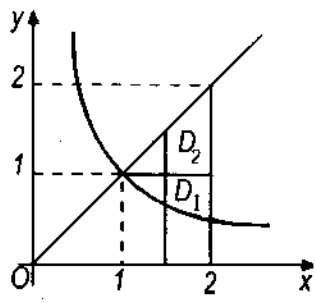
Hình 3.6

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx. \tag{3.16}$$

Đó là công thức đổi thứ tự tích phân.

Ví dụ 1 : Hãy xác định các cận tích phân khi tính $I = \iint_D f(x, y)dxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $x = 2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x$ (hình 3.7).

Miền D được xác định bởi $1 \leq x \leq 2$, $\frac{1}{x} \leq y \leq x$, do đó



Hình 3.7

$$I = \int_1^2 dx \int_{1/x}^{x} f(x, y)dy.$$

Nếu đổi thứ tự tích phân, ta phân chia D thành hai miền D_1 và D_2 ; D_1 được xác định bởi $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$, $\frac{1}{y} \leq x \leq 2$ còn D_2 được xác định bởi $1 \leq y \leq 2$, $y \leq x \leq 2$. Do đó

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x, y)dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y)dx.$$

Rõ ràng cách tính thứ nhất đơn giản hơn.

Từ ví dụ này ta thấy rằng khi tính tích phân kép, cần chọn thứ tự tích phân sao cho cách tính đơn giản hơn.

Ví dụ 2 : Tính $I = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $y = x$, $y = x + 1$, $y = 1$, $y = 3$ (hình 3.8).

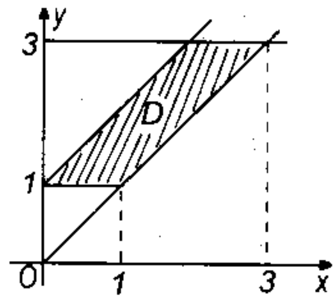
Rõ ràng trong trường hợp này nên lấy tích phân theo x trước. Miền D được xác định bởi các bất đẳng thức $1 \leq y \leq 3$, $y - 1 \leq x \leq y$. Do đó

$$I = \int_1^3 dy \int_{y-1}^{y} (x^2 + y^2)dx =$$

$$= \int_1^3 dy \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_{x=y-1}^{x=y} =$$

$$= \int_1^3 \left[\frac{y^3}{3} + y^3 - \frac{(y-1)^3}{3} - y^2(y-1) \right] dy =$$

$$= \left[\frac{y^4}{12} + \frac{y^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{12} \right] \Big|_1^3 = 14 .$$



Hình 3.8

Bạn đọc hãy đổi thứ tự tích phân để so sánh hai cách tính.

3.2.3. Đổi biến số trong tích phân kép

• *Công thức đổi biến số trong tích phân kép.* Xét tích phân kép

$$\iint_D f(x, y)dxdy,$$

trong đó f(x,y) liên tục trên D. Thực hiện phép đổi biến số :

(3.17) $\quad x = x(u, v), \ y = y(u, v).$

Giả sử rằng :

1) $x(u, v)$, $y(u, v)$ là những hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong một miền đóng D' của mặt phẳng O'uv ;

2) Các công thức (3.17) xác định một song ánh từ miền D' lên miền D của mặt phẳng Oxy ;

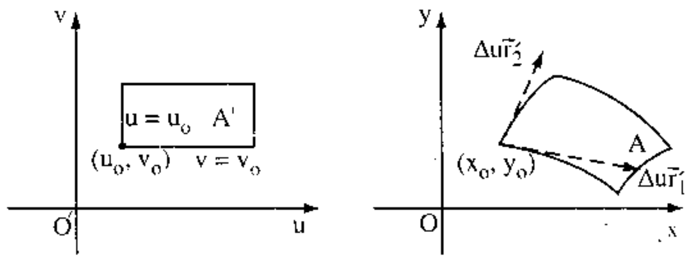
3) Định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0 \text{ trong miền D'}.$$

Khi đó ta có công thức

(3.18) $$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| dudv$$

Trước hết ta xét một hình chữ nhật A' trong mặt phẳng O'uv, đỉnh dưới bên trái của nó là điểm (u_o, v_o), hai cạnh của nó là Δu, Δv (hình 3.9), diện tích của nó là $\Delta S' = \Delta u \Delta v$. Ảnh của A' nói chung là một tứ giác cong A trong mặt phẳng Oxy có một đỉnh là điểm (x_o, y_o), trong đó $x_o = x(u_o, v_o)$, $y_o = y(u_o, v_o)$



Hình 3.9

Phương trình của cạnh dưới của A' là $v = v_o$, ảnh của nó là đường có phương trình tham số là

$$x = x(u, v_o),\ y = y(u, v_o),$$

hay dưới dạng vectơ

$$\vec{r_1}(u) = x(u, v_o)\vec{i} + y(u, v_o)\vec{j}.$$

Vậy vectơ

$$\vec{r'}_1 = x'_u(u_o, v_o)\vec{i} + y'_u(u_o, v_o)\vec{j} = x'_u\vec{i} + y'_u\vec{j}$$

là vectơ tiếp tuyến của đường cong trên tại (x_o, y_o). Tương tự như vậy, vectơ tiếp tuyến của ảnh của cạnh trái của A' (tức là $u = u_o$) tại (x_o, y_o) là

$$\vec{r'}_2 = x'_v(u_o, v_o)\vec{i} + y'_v(u_o, v_o)\vec{j} = x'_v\vec{i} + y'_v\vec{j}.$$

Vậy khi Δu, Δv khá bé, ta có thể xấp xỉ diện tích ΔS của hình thang cong A bởi diện tích của hình bình hành xác định bởi các vectơ $\Delta u\vec{r'}_1$, $\Delta v\vec{r'}_2$, tức là bởi chiều dài của tích vectơ $\Delta u\vec{r'}_1 \wedge \Delta v\vec{r'}_2 = \Delta u\Delta v\ \vec{r'}_1 \wedge \vec{r'}_2$. Ta có

$$\vec{r'}_1 \wedge \vec{r'}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & 0 \\ x'_v & y'_v & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \vec{k} = J.\vec{k},$$

Do đó

(3.19) $$\Delta S \approx |J|\Delta u \Delta v = |J|\Delta S'.$$

Bây giờ chia miền D thành một số hữu hạn mảnh có dạng hình tứ giác cong đã nêu trên hình 3.10. Theo định nghĩa của tích phân kép ta có

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

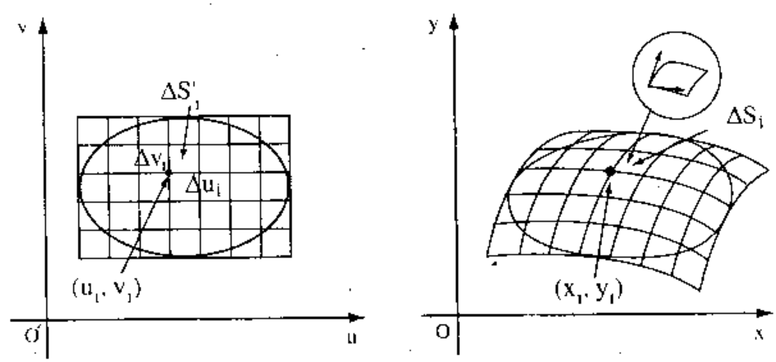
trong đó ΔS_i là diện tích của mảnh thứ i, (x_i, y_i) là một điểm tùy ý chọn trong mảnh ấy, d_i là đường kính của nó. Gọi (u_i, v_i) là điểm ứng với (x_i, y_i). Theo (3.19) ta có

$$f(x_i, y_i)\Delta S_i \approx f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i))|J|\Delta S'_i$$

Do đó

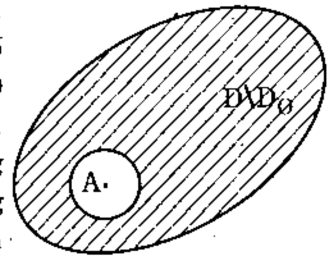
$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \lim_{\max d'_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i))|J|\Delta S'_i$$

trong đó d_i' là đường kính của hình chữ nhật $\Delta S_i'$, tổng tích phân ở vế phải trải trên miền D'. Từ đó ta được công thức (3.18).



Hình 3.10

Chú thích. Công thức (3.18) vẫn còn đúng khi định thức J = 0 tại một số điểm trong D. Thật vậy, giả sử J = 0 tại điểm A trong D. Gọi D_o là miền tròn tâm A bán kính r nằm hoàn toàn trong D (hình 3.11). Công thức (3.18) đúng trong miền $D - D_o$. Gọi D', D'_o là nghịch ảnh của D, D_o qua ánh xạ (3.17). Ta có



Hình 3.11

$$\iint_D fdxdy = \iint_{D-D_o} fdxdy + \iint_{D_o} fdxdy = \iint_{D'-D'_o} f|J|dudv + \iint_{D_o} fdxdy.$$

Vì f bị chặn trong D nên có thể chọn r đủ bé để $\forall\ \varepsilon > 0$ ta có

$$\left|\iint_{D_o} fdxdy\right| < \varepsilon.$$

Do đó

$$\lim_{r\to 0} \iint_{D'-D'_o} f|J|dudv = \iint_D fdxdy.$$

Nhưng vì (3.17) là một song ánh liên tục, f |J| bị chặn trên D' nên khi $r \to 0$ thì $\iint_{D'_o} f|J|dudv \to 0$, do đó

$$\iint_{D'-D'_o} f|J|dudv \to \iint_{D'} f|J|dudv.$$

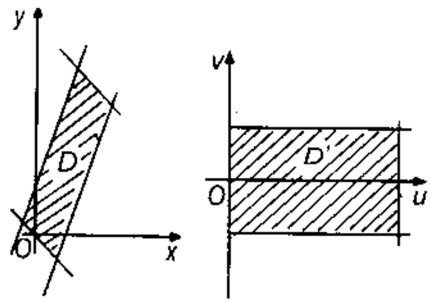
Vậy

$$\iint_D fdxdy = \iint_{D'} f|J|dudv \ \blacksquare$$

Ví dụ 1 : Tính $I = \iint_D (x + y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $y = -x$, $y = -x + 3$, $y = 2x - 1$, $y = 2x + 1$.

Thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = -2x + y. \end{cases}$$



Hình 3.12.

Đó là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbf{R}^2$ vào $\mathbf{R}^2$. Định thức của ma trận của ánh xạ ấy là

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Ánh xạ ấy là một song ánh biến miền D lên hình chữ nhật D' giới hạn bởi các đường u = 0, u = 3, v = −1, v = 1 (hình 3.12).

Vì $J = \frac{1}{3}$, nên áp dụng công thức (3.18) ta được

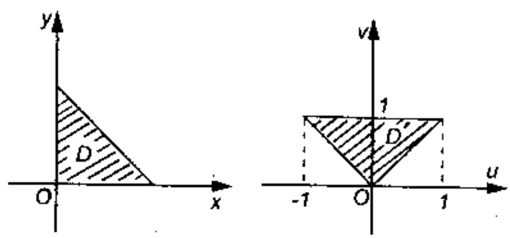
$$I = \frac{1}{3}\iint_{D'} u du dv = \frac{1}{3}\int_0^3 u du.\int_{-1}^1 dv =$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{u^2}{2}\Big|_0^3 . v\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3}.\frac{9}{2}.2 = 3.$$

Ví dụ 2 : Tính $I = \iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy$, D là miền xác định bởi $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$.

Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x - y = u \\ x + y = v \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u + v) \\ y = \frac{1}{2}(v - u). \end{cases}$$



Hình 3.13

Đó là một song ánh từ D lên D' xác định bởi $u + v \geq 0$, $v - u \geq 0$, $v \leq 1$ (hình 3.13). Ta có

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

Do đó

$$I = \frac{1}{2} \iint\limits_{D'} e^{\frac{u}{v}} \, dudv = \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} \, du$$

$$= \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \int_0^1 vdv = \frac{1}{4} (e - e^{-1})$$

• *Tính tích phân kép trong hệ tọa độ cực.* Công thức liên hệ giữa các tọa độ để các (x, y) và tọa độ cực (r, φ) của cùng một điểm là

$$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi$$

Nếu $r > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ thì các công thức ấy xác định một song ánh giữa các tọa độ để các và tọa độ cực. Riêng điểm gốc tọa độ có $r = 0$ và φ tùy ý.

Xem các công thức trên như một phép đổi biến số, ta có

$$J = \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \neq 0$$

trừ tại gốc O. Do đó từ công thức (3.18) suy ra

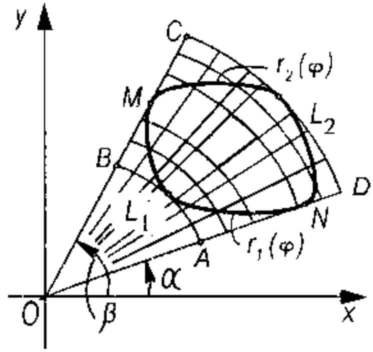
(3.19') $$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, \; r\sin\varphi) r dr d\varphi$$

Theo chú thích ở trên, công thức (3.19') vẫn đúng trong trường hợp miền D chứa gốc O.

Nếu miền D được xác định bởi $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi)$ như ở hình 3.14, ta được

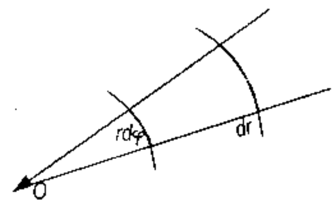
(3.20) $$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$$

Đó là công thức tính tích phân kép trong tọa độ cực.



Hình 3.14

Chú thích 1. Cũng có thể tính yếu tố diện tích dS trong hệ tọa độ cực như sau. Chia miền D thành các mảnh nhỏ bởi các đường tròn đồng tâm r = h (h không đổi) và các tia $\varphi = k$ (k không đổi). Xem mỗi mảnh nhỏ xấp xỉ như một hình chữ nhật có kích thước là dr và $rd\varphi$, do đó $dS = rdrd\varphi$ (hình 3.15).



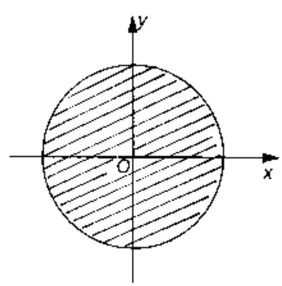
Hình 3.15

Chú thích 2. Nếu gốc O nằm trong miền D và mọi tia xuất phát từ O đều cắt biên của miền D tại một điểm có bán kính vectơ là $r(\varphi)$ thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

Ví dụ 1 : Tính $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$,

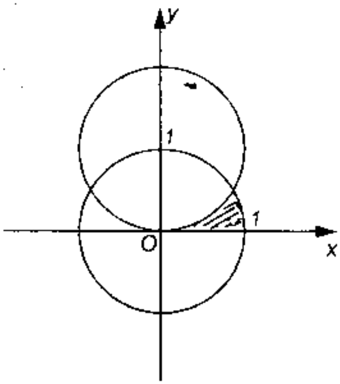
D là một phần tư hình tròn đơn vị nằm trong góc phần tư thứ nhất (hình 3.16).



Hình 3.16

Chuyển sang tọa độ cực, biểu thức dưới dấu tích phân được viết là $\frac{rdrd\varphi}{\sqrt{1+r^2}}$, miền D' được giới hạn bởi hai đường r = 0, r = 1 và hai tia $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Do đó

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1+r^2}} = \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{1+r^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2} - 1)$$



Hình 3.17

Ví dụ 2 : Tính $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, D là miền xác định bởi $x^2 + y^2 - 2y \geqslant 0$, $x^2 + y^2 - 1 \leqslant 0$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ (hình 3.17).

Hai đường $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ có phương trình trong tọa độ cực là $r = 2\sin\varphi$, $r = 1$. Chúng cắt nhau ở một điểm có tọa độ cực là $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$. Vậy miền D' được xác định bởi $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6}$, $2\sin\varphi \leqslant r \leqslant 1$. Do đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_{2\sin\varphi}^1 r^2dr = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{r^3}{3}\Big|_{2\sin\varphi}^1 d\varphi$.

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - 8\sin^3\varphi)d\varphi = \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{6} - 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos^2\varphi)\sin\varphi d\varphi\right] =$$

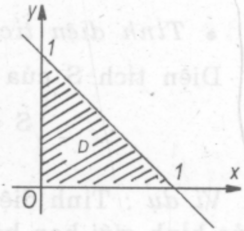
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{6} + 8\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - 8\frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6} + 3\sqrt{3} - \frac{16}{3}\right)$$

3.2.4. Ứng dụng hình học của tích phân kép

• *Tính thể tích của vật thể.* Thể tích của vật thể hình trụ mà mặt xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với Oz, đáy là miền D trong mặt phẳng Oxy, phía trên giới hạn bởi mặt cong $z = f(x, y)$, $f(x, y) \geqslant 0$ và liên tục trên D được cho bởi công thức

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

Ví dụ 1 : Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi các mặt phẳng $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$ và mặt $z = x^2 + xy + 1$.



Hình 3.18

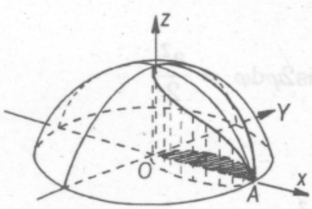
Đó là một vật thể hình trụ mà đáy là miền D giới hạn bởi các đường $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ (hình 3.18). Trên D ta có $z > 0$, vậy

$$V = \iint_D (x^2 + xy + 1)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + xy + 1)dy =$$

$$= \int_0^1 dx.(x^2y + x\frac{y^2}{2} + y) \Big|_{y=0}^{y=1-x} =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{x^3}{2} - \frac{x}{2} + 1\right)dx = \left(-\frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{4} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{8}.$$

Ví dụ 2 : Tính thể tích V của phần hình trụ giới hạn bởi mặt $x^2 + y^2 = 2x$ nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (hình 3.19).



Hình 3.19

Vì tính đối xứng, ta có

$$V = 4 \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dxdy,$$ D là nửa mặt tròn $x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$. Chuyển sang tọa độ cực, miền D' được xác định bởi $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi$.

Vậy $$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \sqrt{4 - r^2}\, rdr =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 - r^2)^{3/2} \Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

• *Tính diện tích hình phẳng*

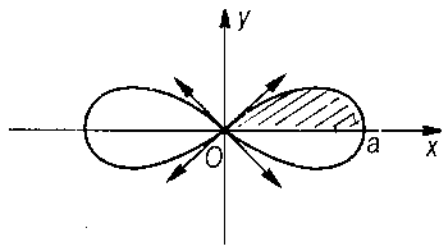
Diện tích S của hình phẳng D được cho bởi công thức

$$S = \iint_D dxdy.$$

Ví dụ : Tính diện tích S của hình giới hạn bởi đường

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2).$$

Chuyển sang tọa độ cực, đường cong đó có phương trình là $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$, đó là đường lem–nix–cat. Vì tính đối xứng ta tính diện tích của miền D được đánh dấu trên hình 3.20,



Hình 3.20

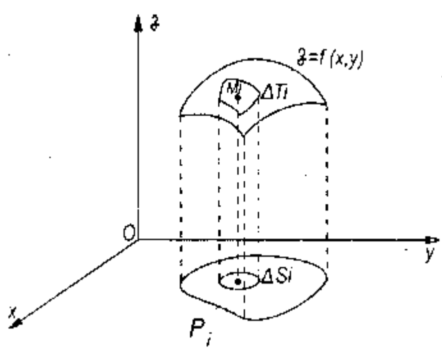
diện tích ấy bằng $\dfrac{S}{4}$. Miền D ấy được xác định bởi $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4}$, $0 \leq r \leq a\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Vậy

$$\frac{S}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} rdr \quad = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2}.$$

Do đó

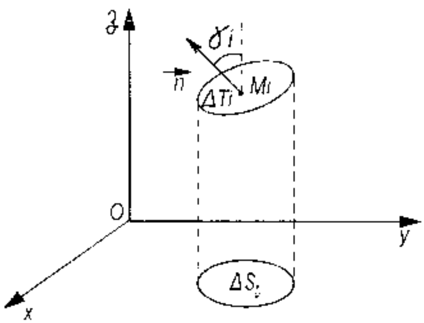
$$S = 2a^2.$$

• *Diện tích mặt.* Giả sử có một mặt giới hạn bởi một đường kín. Phương trình của mặt là $z = f(x, y)$, trong đó $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ là hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục. Hãy tính diện tích của mặt ấy.



Hình 3.21

Gọi D là hình chiếu của mặt lên mặt phẳng Oxy (hình 3.21) chia miền D thành n mảnh nhỏ. Gọi tên và cả diện tích



Hình 3.22

của các mảnh ấy là ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n. Trong mỗi mảnh ΔS_i lấy một điểm tùy ý $P_i(\xi_i, \eta_i)$. Ứng với nó là điểm $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ trên mặt. Gọi T_i là tiếp diện của mặt tại M_i, ΔT_i là mảnh của mặt phẳng T_i mà hình chiếu của nó xuống mặt phẳng Oxy là ΔS_i. Để cho tiện ta cũng dùng kí hiệu ΔT_i để chỉ diện tích của mảnh ΔT_i. Nếu tất cả các mảnh ΔS_i đều có đường kính khá nhỏ, ta có thể xem tổng $\sum_{i=1}^{n} \Delta T_i$ xấp xỉ như diện tích của mặt đã cho.

Gọi γ_i là góc giữa pháp tuyến của mặt đã cho tại M_i và Oz (hình 3.22), ta có

$$\Delta S_i = \Delta T_i \cos\gamma_i \Rightarrow \Delta T_i = \frac{\Delta S_i}{\cos\gamma_i}.$$

Ta biết rằng ba hệ số chỉ phương của pháp tuyến của mặt tại M_i là $-p_i$, $-q_i$, 1, trong đó $p_i = z'_x(N_i)$, $q_i = z'_y(N_i)$ (xem mục 2.2), N_i là hình chiếu của M_i xuống mặt phẳng xOy. Do đó

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}} \Rightarrow \Delta T_i = \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}\ \Delta S_i$$

Vì vậy ta có thể xấp xỉ diện tích của mặt bởi tổng tích phân

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}\ \Delta S_i$$

với độ chính xác càng lớn khi n càng lớn và đường kính d_i của ΔS_i càng nhỏ. Người ta định nghĩa diện tích σ của mặt là giới hạn, nếu có, của tổng ấy khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$. Giới hạn ấy chính là tích phân kép $\iint\limits_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy$ và chắc chắn tồn tại vì $p = z'_x$, $q = z'_y$ liên tục trên D. Vậy

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy \qquad (3.21)$$

Ví dụ : Tính diện tích của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$ (hình 3.19).

Vì lí do đối xứng, chỉ cần xét phần của mặt nằm trong góc phần tám thứ nhất. Khi đó

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},$$

$$p = z'_x = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \quad q = z'_y = -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Do đó

$$\sigma = 4\iint\limits_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy,$$

trong đó D là nửa mặt tròn $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$, $y \geq 0$. Chuyển sang tọa độ cực, ta được

$$\sigma = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \frac{rdr}{\sqrt{4-r^2}} = -8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-r^2}\,\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\varphi)d\varphi = 16\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

3.2.5. Ứng dụng cơ học của tích phân kép

- *Tính khối lượng của một bản phẳng không đồng chất*

Cho một bản phẳng chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy. Lấy một mảnh tùy ý của bản ấy có diện tích ΔS và giả sử khối lượng của mảnh ấy là Δm. Giới hạn, nếu có, của tỉ số $\frac{\Delta m}{\Delta S}$ khi $\Delta S \to 0$ sao cho mảnh ấy thu về một điểm P của nó được gọi là khối lượng riêng của bản tại P và được kí hiệu là $\rho(P)$. Nếu bản là đồng chất, thì ρ không đổi. Nếu bản không đồng chất thì ρ là một hàm số của P.

Bây giờ giả sử cho biết khối lượng riêng của bản là một hàm số liên tục $\rho(P) = \rho(x, y)$. Hãy tính khối lượng của bản. Chia miền D thành n mảnh nhỏ $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ và chọn trong mỗi mảnh ΔS_i một điểm tùy ý $P_i(x_i, y_i)$. Khối lượng của bản được tính xấp xỉ bởi tổng :

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(P_i)\Delta S_i.$$

Giới hạn m, nếu có, của tổng đó khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$ (d_i là đường kính của ΔS_i) được gọi là khối lượng của bản. Vậy

$$m = \iint_D \rho(x, y)dxdy. \qquad (3.22)$$

Ví dụ : Tính khối lượng của bản phẳng choán miền D xác định bởi $x^2 + y^2 - R^2 \leqslant 0$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, biết khối lượng riêng $\rho(x, y) = xy$.

Theo công thức (3.22), ta có

$$m = \iint_D xydxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực, miền D' được xác định bởi $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant r \leqslant R$. Vậy

$$m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r^2\cos\varphi\sin\varphi r dr d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\varphi}{2} d\varphi . \int_0^R r^3 dr = -\frac{\cos 2\varphi}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} . \frac{R^4}{4} = \frac{R^4}{8}.$$

• *Mômen quán tính của bản phẳng.* Theo định nghĩa mômen quán tính của một chất điểm có khối lượng m đặt tại điểm P(x, y) đối với trục Ox, đối với trục Oy và đối với gốc tọa độ theo thứ tự là

$$I_x = my^2$$
$$(3.23) \qquad I_y = mx^2$$
$$I_o = m(x^2 + y^2).$$

Bây giờ xét một bản phẳng choán một miền D trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng $\rho(x, y)$, với $\rho(x, y)$ là một hàm số liên tục trên D. Dựa vào các công thức (3.23) và định nghĩa của tích phân kép, ta có các công thức sau đây để tính mômen quán tính của bản phẳng đối với trục Ox, đối với trục Oy và đối với gốc tọa độ :

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x, y)dxdy$$
$$(3.24) \qquad I_y = \iint_D x^2\rho(x, y)dxdy$$
$$I_o = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)dxdy.$$

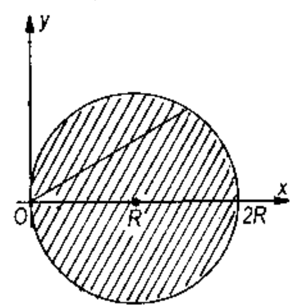
Ví dụ 1 : Tính mômen quán tính đối với gốc tọa độ của miền tròn D xác định bởi miền tròn $x^2 + y^2 - 2Rx \leqslant 0$ (hình 3.23) biết khối lượng riêng

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ta có

$$I_o = \iint_D (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực, miền D' được xác định bởi $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant r \leqslant R\cos\varphi$, vậy



Hình 3.23

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} r^4 dr =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^5}{5} \cos^5\varphi d\varphi = \frac{2R^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi d\varphi = \frac{2R^5}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{75} R^5.$$

Ví dụ 2 : Tính mômen quán tính đối với trục Oy của miền D xác định bởi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, biết rằng $\rho(x, y) \equiv 1$.

Ta có

$$I_y = \iint_D x^2 dxdy.$$

Biên của miền D là đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Do đó

$$I_y = \int_{-a}^{a} x^2 dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \int_{-a}^{a} \frac{2b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, x^2 dx$$

$$= \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, x^2 dx.$$

Thực hiện phép đổi biến số $x = a\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Ta có $dx = a\cos t dt$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a|\cos t| = a\cos t$, do đó

$$I_y = \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \sin^2 t \cos^2 t dt = 4ba^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \sin^4 t) dt$$

$$= 4ba^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

• *Trọng tâm của bản phẳng.* Cho một hệ gồm n chất điểm có khối lượng m_1, m_2, ..., m_n đặt tại các điểm $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_n(x_n, y_n)$. Khi đó trọng tâm G của hệ có các tọa độ cho bởi công thức

(3.25) $$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Bây giờ xét một bản phẳng D trong mặt phẳng Oxy. Nếu khối lượng riêng của nó là một hàm số liên tục $\rho(x, y)$, thì các tọa độ của trọng tâm G của nó được tính bởi công thức

(3.26) $$x_G = \frac{\iint_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy}, \quad y_G = \frac{\iint_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy}.$$

Nếu bản đồng chất thì ρ không đổi, do đó

(3.27) $$x_G = \frac{1}{S}\iint_D xdxdy, \quad y_G = \frac{1}{S}\iint_D ydxdy$$

trong đó S là diện tích của miền D.

Ví dụ 1 : Xác định trọng tâm G của một bản đồng chất xác định bởi $x^2 + y^2 - 1 \leqslant 0$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Gọi D là miền choán bởi bản đó. Đó là một phần tư hình tròn. Vì lí do đối xứng, ta có $x_G = y_G$. Dùng công thức (3.27) để tính y_G. Vì $S = \frac{\pi}{4}$, ta được

$$y_G = \frac{4}{\pi}\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{1-x^2}{2}dx = \frac{2}{\pi}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3\pi}.$$

Vậy $x_G = y_G = \dfrac{4}{3\pi}$.

Ví dụ 2 : Xác định trọng tâm G của bản đồng chất giới hạn bởi đường lem–nix–cat $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ ứng với $x \geq 0$ (xem hình 3.20).

Vì lí do đối xứng, ta có $y_G = 0$. Vì diện tích của bản bằng a^2 (xem ví dụ ở mục 3.2.4), theo công thức (3.27)

$$x_G = \frac{1}{a^2}\iint_D x\,dx\,dy$$

Chuyển sang tọa độ cực, miền D' được xác định bởi $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq r \leq a\sqrt{2\cos 2\varphi}$, do đó

$$x_G = \frac{1}{a^2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r^2\cos\varphi\,dr = \frac{2\sqrt{2}}{3}a\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\cos^{3/2}2\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}a\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2\varphi)^{3/2}\cos\varphi\,d\varphi.$$

Thực hiện phép đổi biến số $\sqrt{2}\sin\varphi = \sin\alpha$, ta được

$$x_G = \frac{4}{3}a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\alpha\,d\alpha = \frac{\pi a}{4}.$$

3.3. TÍCH PHÂN BỘI BA

3.3.1. Khái niệm tích phân bội ba

Cho hàm số f(x, y, z) xác định trong một miền đóng, giới nội V của không gian Oxyz. Chia miền V một cách tùy ý thành n miền nhỏ, gọi tên và thể tích của các miền nhỏ ấy là $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$. Trong mỗi miền ΔV_i lấy một điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

được gọi là tổng tích phân của hàm số f(x, y, z) trong miền V.

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$ (d_i là đường kính của miền nhỏ ΔV_i) mà I_n dần tới một giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách chọn điểm M_i trong miền ΔV_i, thì giới hạn ấy được gọi là *tích phân bội ba* của hàm số f(x, y, z) trong miền V và được kí hiệu là

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV.$$

Nếu tích phân trên tồn tại, ta nói rằng hàm số f(x, y, z) *khả tích* trong miền V.

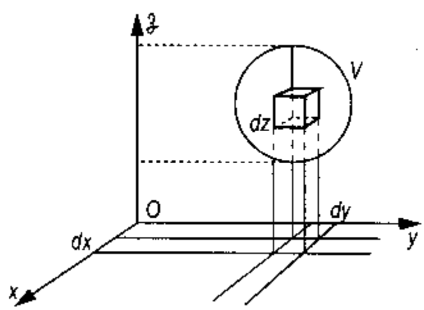
Ta thừa nhận rằng *nếu hàm số f(x, y, z) liên tục trong miền bị chặn, đóng V thì nó khả tích trong miền ấy.*

Nếu f(x, y, z) là khối lượng riêng của vật thể V thì tích phân trên cho ta khối lượng của vật thể ấy.

Nếu $f(x, y, z) \equiv 1$ thì $\iiint\limits_V dV$ cho ta thể tích của miền V.

Tích phân bội ba cũng có các tính chất tương tự như tích phân kép.

Chú thích. Vì tích phân bội ba không phụ thuộc cách chia miền V thành các miền nhỏ, ta có thể chia miền V bởi ba họ mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ (hình 3.24), do đó dV = dxdydz và có thể viết



Hình 3.24

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

3.3.2. Cách tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ đề các

Tương tự như khi tính tích phân kép, ta có thể đưa việc tính tích phân bội ba về việc tính ba tích phân đơn liên tiếp.

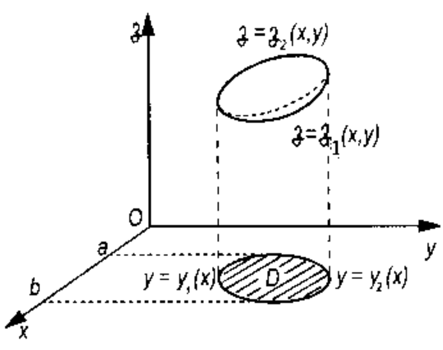
Trong mục này ta tính tích phân bội ba

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz,$$

trong đó hàm số f(x, y, z) liên tục trong miền V.

Nếu miền V được giới hạn bởi các mặt $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, trong đó $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ là những hàm số liên tục trong miền D, D là hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy (hình 3.25), ta có

$$(3.28) \qquad I = \iint\limits_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$



Hình 3.25

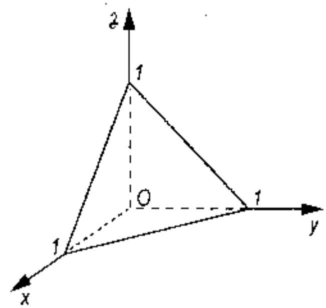
Nếu miền D được giới hạn bởi các đường $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, trong đó $y_1(x)$, $y_2(x)$ là những hàm số liên tục trên đoạn [a, b], ta được

$$(3.29) \quad I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Ví dụ 1 : Tính

$$I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1 + x + y + z)^3},$$ V là miền giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x + y + z = 1$.

Miền V được xác định bởi các bất đẳng thức : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$, $0 \leq z \leq 1 - x - y$ (hình 3.26). Do công thức (3.29)



Hình 3.26

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(1+x+y+z)^{-2}}{-2} \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\right] dy = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{4}y + \frac{1}{1+x+y}\right]\Big|_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{1+x}\right) dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{3x}{4} - \frac{x^2}{8} - \ln(1+x)\right]\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}.$$

Ví dụ 2 : Tính $I = \iiint\limits_V z\,dxdydz$, V là nửa hình cầu giới hạn bởi mặt $z = 0$ và mặt $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Gọi D là hình chiếu của V lên mặt phẳng $z = 0$, đó là mặt tròn đơn vị. Theo công thức (3.28), ta có :

$$I = \iint\limits_D dxdy \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} z dz \qquad = \frac{1}{2}\iint\limits_D (R^2 - x^2 - y^2)dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực để tính tích phân kép trên, ta được

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R^2 - r^2)rdr = -\frac{\pi}{4}(R^2 - r^2)^2\Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{4}.$$

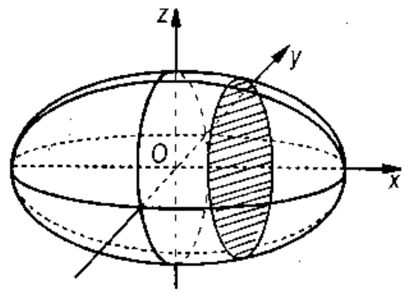
Chú thích. Cũng như đối với tích phân kép, ta có thể đổi thứ tự tích phân khi tính tích phân bội ba. Ta cũng có thể tính tích phân $I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$ như sau. Gọi $S(x)$ là thiết diện của miền V bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x. Khi đó

$$(3.30) \qquad I = \int_a^b dx \iint\limits_{S(x)} f(x, y, z)dydz.$$

Ví dụ : Tính $\iiint\limits_V x^2 dxdydz$, V là miền giới hạn bởi mặt elipxôit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (hình 3.27).

Theo công thức (3.30) ta có

$$I = \int_{-a}^{a} x^2 dx \iint\limits_{S(x)} dydz,$$



Hình 3.27

$\iint\limits_{S(x)} dydz$ bằng diện tích của thiết diện $S(x)$. Vì $S(x)$ là miền giới hạn bởi đường elip

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

hay

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1$$

nên diện tích của $S(x)$ bằng $\pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Do đó

$$I = \pi bc \int_{-a}^{a} x^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc \int_0^a \left(x^2 - \frac{x^4}{a^2}\right)dx =$$

$$= 2\pi bc\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2}\right)\Big|_0^a = \frac{4}{15}\pi a^3 bc.$$

3.3.3. Phương pháp đổi biến số trong tích phân bội ba

• *Công thức đổi biến số trong tích phân bội ba.* Xét tích phân bội ba

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz,$$

trong đó hàm số $f(x, y, z)$ liên tục trong V.

Ta thực hiện phép đổi biến số

$$(3.30') \qquad \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w). \end{cases}$$

Giả sử rằng :

1) $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ là những hàm số liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong một miền đóng V' của không gian Ouvw ;

2) Các công thức (3.30') xác định một song ánh từ miền V' lên miền V của không gian Oxyz ;

3) Định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$$

trong miền V'

Khi đó ta có công thức

$$(3.31) \qquad \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]|J|dudvdw.$$

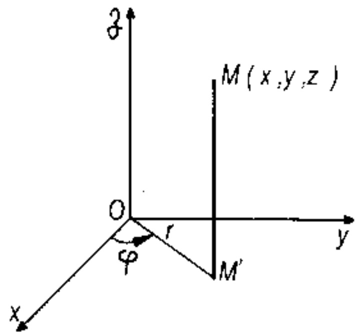
• *Tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ.* Tọa độ trụ của một điểm $M(x, y, z)$ trong không gian Oxyz là bộ ba số (r, φ, z), trong đó (r, φ) là tọa độ cực của điểm $M'(x, y)$, hình chiếu của M lên mặt phẳng Oxy (hình 3.28). Với mọi điểm của không gian, ta có

$$r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty.$$

Giữa các tọa độ đề các (x, y, z) và tọa độ trụ (r, φ, z) của điểm M có mối liên hệ :

(3.32) $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z.$

Nếu $r > 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$, thì các công thức (3.32) xác định một song ánh giữa các tọa độ đề các và tọa độ trụ. Riêng các điểm trên trục Oz có z xác định, $r = 0$ và φ tùy ý. Định thức Jacobi của phép biến đổi (3.32) là



Hình 3.28

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r,$$

$J \neq 0$ với $r \neq 0$. Công thức (3.31) cho ta

(3.33) $$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz.$$

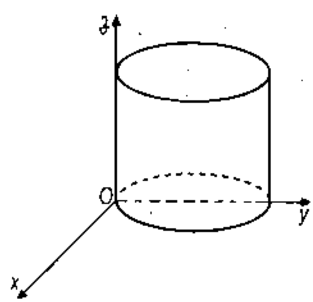
Đó là công thức tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ.

Công thức ấy cũng vẫn đúng khi miền V chứa những điểm trên trục Oz.

Ví dụ 1 : Tính

$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\,.z\ dxdydz$, V là miền hình trụ giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = 2y$, $z = 0$, $z = a$ (hình 3.29). Chuyển sang tọa độ trụ, ta có

$$I = \iiint\limits_{V'} r^2zdrd\varphi dz = \iint\limits_D r^2drd\varphi \int_0^a zdz,$$



Hình 3.29

trong đó D là miền tròn giới hạn bởi đường $x^2 + y^2 = 2y$, hay $r = 2\sin\varphi$, do đó

$$I = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r^2 dr =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^{2\sin\varphi} . d\varphi =$$

$$= \frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi} \sin^3\varphi d\varphi = \frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi} (1 - \cos^2\varphi)\sin\varphi d\varphi.$$

Đặt $u = \cos\varphi$, ta có $du = -\sin\varphi d\varphi$, vậy

$$I = -\frac{4a^2}{3}\int_1^{-1} (1 - u^2)du = \frac{8a^2}{3}\int_0^{1} (1 - u^2)du = \frac{16a^2}{9}.$$

Ví dụ 2 : Tính $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, V là miền hình nón tròn xoay giới hạn bởi các mặt $z^2 = x^2 + y^2$, $z = a$ (hình 3.30).

Chuyển sang tọa độ trụ, ta có

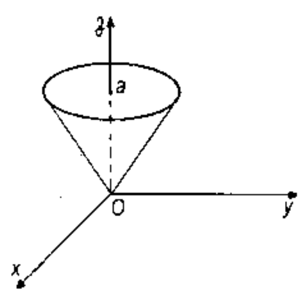
$I = \iiint\limits_{V'} (r^2 + z^2) r dr d\varphi dz = \iint\limits_D r dr d\varphi \int_r^a (r^2 + z^2)dz$ trong đó D là miền tròn giới hạn bởi đường $r = a$, do đó

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_r^a (r^2 + z^2)dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr . \left(r^2 z + \frac{z^3}{3}\right)\Big|_{z=r}^{z=a} =$$

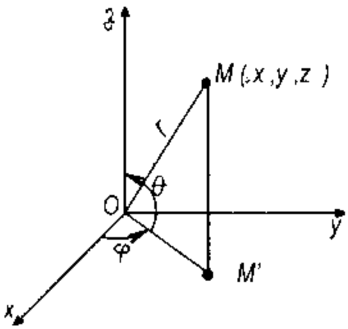
$$= 2\pi . \int_0^a \left(ar^3 + \frac{a^3 r}{3} - \frac{4}{3} r^4\right) dr$$

$$= 2\pi\left(a\frac{r^4}{4} + a^3\frac{r^2}{6} - \frac{4}{3}\frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^a = \frac{3\pi a^5}{10}.$$



Hình 3.30

• *Tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu.* Tọa độ cầu của một điểm M(x, y, z) trong không gian Oxyz là bộ ba số (r, θ, φ), trong đó r = OM, φ là góc giữa trục Ox và $\overrightarrow{OM'}$, M' là hình chiếu của M lên mặt phẳng Oxy, θ là góc giữa trục Oz và $\overrightarrow{OM}$ (hình 3.31). Với mọi điểm M(x, y, z), ta có



Hình 3.31

$$0 \leqslant r < +\infty,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Giữa các tọa độ đề các và tọa độ cầu của điểm M, có mối liên hệ

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta. \tag{3.34}$$

Nếu r > 0, 0 < θ < π, 0 ⩽ φ < 2π, thì các công thức trên xác định một song ánh giữa các tọa độ đề các và tọa độ cầu. Riêng điểm gốc tọa độ có r = 0, θ và φ tùy ý, còn những điểm trên Oz có r xác định, $\theta = 0$ hoặc $\theta = \pi$, φ tùy ý. Định thức Jacobi của ánh xạ (3.34) là

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -r^2\sin\theta,$$

$J \neq 0$ với $r \neq 0$ và $\sin\theta \neq 0$. Từ công thức (3.31) ta được

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \tag{3.35}$$

$$= \iiint_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Đó là công thức tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu.

Công thức (3.35) vẫn đúng khi miền V chứa những điểm trên trục Oz.

Ví dụ 1 : Tính $I = \iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dxdydz$, V là miền giới hạn bởi hai mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Chuyển sang tọa độ cầu, ta có

$$I = \iiint\limits_{V'} r\sin\theta \, drd\theta \, d\varphi.$$

Miền V' được xác định bởi $1 \leqslant r \leqslant 2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_1^2 rdr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = 6\pi.$$

Ví dụ 2 : Tính $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) \, dxdydz$, V là miền xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$.

Chuyển sang tọa độ cầu, ta có

$$I = \iiint\limits_{V'} r^4 \sin^3\theta \, drd\theta \, d\varphi$$

V' là nửa hình cầu trên xác định bởi $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, do đó

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta \int_0^R r^4 dr = 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

3.3.4. Trọng tâm của vật thể

Cho một vật thể V trong không gian Oxyz. Nếu khối lượng riêng của vật thể tại M(x, y, z) là $\rho(x, y, z)$ thì khối lượng của vật thể được cho bởi công thức

$$m = \iiint\limits_V \rho(x, y, z) dxdydz.$$

Tọa độ của trọng tâm G của vật thể được cho bởi,

$$(3.36)\qquad \begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\iiint_V x\rho(x, y, z)dxdydz \\ y_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\iiint_V y\rho(x, y, z)dxdydz \\ z_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\iiint_V z\rho(x, y, z)dxdydz\,. \end{cases}$$

Nếu vật thể đồng chất thì ρ không đổi, do đó

$$(3.37)\qquad \begin{cases} x_G = \dfrac{1}{V}\displaystyle\iiint_V xdxdydz \\ y_G = \dfrac{1}{V}\displaystyle\iiint_V ydxdydz \\ z_G = \dfrac{1}{V}\displaystyle\iiint_V zdxdydz \end{cases}$$

trong đó ta cũng kí hiệu V là thể tích của vật thể V.

Ví dụ : Xác định trọng tâm của vật thể đồng chất giới hạn bởi mặt nón $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ $(z > 0)$ và mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (hình 3.32).

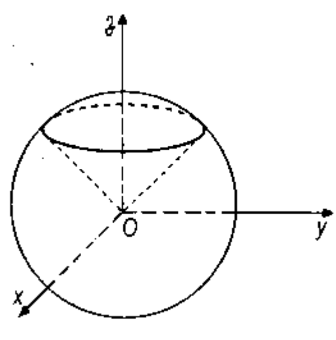
Giao tuyến của mặt nón và mặt cầu được xác định bởi

$$1 - z^2 = z^2 \Rightarrow 2z^2 = 1 \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó những bán kính vectơ của các điểm trên giao tuyến ấy làm với trục Oz một góc bằng $\dfrac{\pi}{4}$.

Vì lí do đối xứng $x_G = y_G = 0$. Chuyển sang tọa độ cầu để tính z_G theo công thức (3.37). Ta có

$$V = \iiint_{V'} r^2\sin\theta drd\theta d\varphi.$$



Hình 3.32

Miền V' được xác định bởi $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Do đó

$$V = \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2\pi =$$

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{3}\pi.$$

Cũng vậy, ta có

$$\iiint\limits_V z dx dy dz = \iiint\limits_{V'} r\cos\theta \,.\, r^2 \sin\theta \, dr d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$$

Do đó $z_G = \dfrac{3}{8(2 - \sqrt{2})} = \dfrac{3}{8}\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

TÓM TẮT CHƯƠNG III

- Tích phân phụ thuộc tham số $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$

– Nếu $f(x, y)$ liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I(y)$ liên tục trên $[c, d]$.

– Nếu $f(x, y)$ liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì

$$\int_c^d I(y)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx.$$

– Nếu f(x, y) liên tục theo x trên [a, b] với mọi y không đổi trong [c, d] và $f'_y(x, y)$ liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)dx.$$

• Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$

– Tích phân suy rộng I(y) được gọi là hội tụ đều đến $y \in [c, d]$ nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0$ sao cho

$$b > B \Rightarrow \left| \int_b^{+\infty} f(x, y)dx \right| < \varepsilon \qquad \forall y \in [c, d].$$

– Nếu $|f(x, y)| \leqslant g(x), \forall (x, y) \in [a, +\infty) \times [c, d]$ và nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ, thì I(y) hội tụ đều đối với $y \in [c, d]$.

– Nếu f(x, y) liên tục trên $[a, +\infty) \times [c, d]$ và nếu I(y) hội tụ đều đối với $y \in [c, d]$ thì I(y) liên tục trên [c, d].

– Nếu f(x, y) liên tục trên $[a, +\infty) \times [c, d]$ và nếu I(y) hội tụ đều đối với $y \in [c, d]$ thì

$$\int_c^d I(y)dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x, y)dy \right)dx.$$

– Nếu f(x, y) liên tục đối với x trên $[a, +\infty)$ với mọi y không đổi thuộc [c, d], $f'_y(x, y)$ liên tục trên $[a, +\infty) \times [c, d]$, nếu I(y) hội tụ và nếu tích phân $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx$ hội tụ đều đối với $y \in [c, d]$ thì

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx$$

• Định nghĩa tích phân kép

Cho hàm số f(x, y) xác định trong một miền giới nội, đóng $D \subset \mathbf{R}^2$. Chia D thành n mảnh nhỏ $\Delta S_1, \ldots, \Delta S_n$. Trong ΔS_i lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i)$. Giới hạn, nếu có, của tổng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$, d_i là đường kính của ΔS_i, được gọi là tích phân kép của f(x, y) trên D và được kí hiệu là

$$\iint_D f(x, y)dxdy.$$

Nếu tích phân ấy tồn tại, ta nói rằng f(x, y) khả tích trên D.

Nếu f(x, y) liên tục trên D thì nó khả tích trên D.

- **Tính tích phân kép trong tọa độ đề các**

– Nếu miền D là hình chữ nhật xác định bởi $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, thì

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$$

– Nếu miền D được xác định bởi $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy.$$

- **Đổi biến số trong tích phân kép**

Xét tích phân kép $I = \iint_D f(x, y)dxdy$. Thực hiện phép đổi biến số

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v).$$

Khi đó

$$I = \iint_{D'} f[x(u, v),\ y(u, v)]\,|J|\,dudv$$

trong đó J là định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix};$$

ảnh của D' qua phép biến đổi trên là D.

- Tính tích phân kép trong tọa độ cực

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi$$

- Thể tích của vật thể hình trụ có đường sinh song song với Oz, đáy là miền D trong mặt phẳng $z = 0$, ở phía trên giới hạn bởi mặt $z = f(x, y)$, trong đó $f(x, y) \geq 0$ trên miền D, bằng

$$V = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy$$

- Diện tích của miền D trong mặt phẳng Oxy bằng

$$S = \iint_D dxdy$$

- Diện tích của mặt cong $z = f(x, y)$ giới hạn bởi một đường cong kín bằng

$$S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dxdy,$$

trong đó D là hình chiếu của mặt cong lên mặt phẳng Oxy, $p = z'_x$, $q = z'_y$.

- Nếu bản phẳng D trong mặt phẳng Oxy có khối lượng riêng $\rho(x, y)$ thì

– Khối lượng của bản D bằng

$$m = \iint_D \rho(x, y)dxdy$$

– Mômen quán tính của bản D đối với Ox, đối với Oy và đối với gốc tọa độ bằng

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x, y)dxdy$$

$$I_y = \iint_D x^2\rho(x, y)dxdy$$

$$I_o = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)dxdy$$

– Tọa độ của trọng tâm G của bản D là

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x, y)dxdy$$

$$y_G = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x, y)dxdy.$$

- Định nghĩa tích phân bội ba

Cho hàm số f(x, y, z) xác định trong một miền giới nội đóng $V \subset \mathbf{R}^3$. Chia V thành n miền nhỏ $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$. Trong ΔV_i lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Giới hạn, nếu có, của tổng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$, d_i là đường kính của ΔV_i, được gọi là tích phân bội ba của f(x, y, z) trên miền V và được kí hiệu là

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz.$$

Nếu tích phân ấy tồn tại, thì f(x, y, z) được gọi là khả tích trên V.

Nếu f(x, y, z) liên tục trên V thì nó khả tích trên V.

- Tính tích phân bội ba trong tọa độ đề các

Nếu miền V được xác định bởi $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, $z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)$ thì

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

- Đổi biến số trong tích phân bội ba

Nếu thực hiện phép đổi biến số $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ thì

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint_{V'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]\,|J|\,dudvdw$$

trong đó J là định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix},$$

ảnh của V' qua phép biến đổi trên là V.

- Tính tích phân bội ba trong tọa độ trụ

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz.$$

- Tính tích phân bội ba trong tọa độ cầu

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta drd\theta d\varphi.$$

- Thể tích V của vật thể V bằng

$$V = \iiint_V dxdydz.$$

- Nếu vật thể V có khối lượng riêng tại điểm (x, y, z) là $\rho(x, y, z)$ thì :

– Khối lượng của vật thể V bằng

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z)dxdydz$$

– Tọa độ của trọng tâm G của vật thể V là

$$x_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\rho(x, y, z)dxdydz$$

$$y_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x, y, z)dxdydz$$

$$z_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x, y, z)dxdydz.$$

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng tích phân phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int_0^1 f(x, y)dx,$$

trong đó f(x, y) là một hàm số gián đoạn xác định bởi

$f(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \geqslant y \\ -1 \text{ nếu } x < y \end{cases}$, là một hàm số liên tục của y.

Vẽ đồ thị của hàm số $u = I(y)$.

2. Khảo sát sự liên tục của tích phân

$$I(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2}\, dx$$

trong đó hàm số f(x) liên tục và dương trên [0, 1].

3. Tính $\int_0^1 x^\alpha(\ln x)^n dx$, trong đó $\alpha > 0$, n nguyên dương.

4. Chứng minh rằng $I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{arctg}(x + y)}{1 + x^2}\, dx$ là liên tục và khả vi trên **R**. Tính I'(y) rồi suy ra biểu thức của I(y).

5. Tính các tích phân

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + y)^{n+1}}$, trong đó $y > 0$, n nguyên dương

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx$, trong đó $\alpha > 0, \beta > 0$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx$, trong đó $\alpha > 0, \beta > 0$.

6. Tính $\iint\limits_D (\cos^2 x + \sin^2 y)\, dxdy$, D là hình vuông $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$.

7. Đổi thứ tự tích phân trong các tích phân sau :

1) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x, y) dy$; 2) $\int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{0}^{2y} f(x, y) dx$.

8. Tính $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x + y)^3}$, miền D được xác định bởi $x \geq 1$, $y \geq 1$, $x + y \leq 3$.

9. Tính $\iint\limits_D x^2(y - x) dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $x = y^2$.

10. Tính $\iint\limits_D \ln(x + y) dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $x = 1$, $y = 1$, $y = 1 + x$.

11. Tính $\iint\limits_D |x + y| dxdy$, D là hình vuông $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.

12. Tính $\iint\limits_D f(x, y) dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, còn $f(x, y) = \int\limits_0^{c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} zdz$.

13. Tính $\iint\limits_D (x - y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$.

14. Tính $\iint\limits_D (x^2 + y^2 + 1)dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường $x^2 + y^2 - x = 0$.

15. Tính $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, D là miền giới hạn bởi

1) Các đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = 4a^2$ $a > 0$

2) Đường hoa hồng bốn cánh $r = a\sin 2\varphi$ $a > 0$.

16. Tính $\iint\limits_D (x + 2y + 1)dxdy$, D là giao của hai hình tròn $x^2 + y^2 \leq 2y$ và $x^2 + y^2 \leq 2x$.

17. Tính $\iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy$; D là miền xác định bởi $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$, $y \geq 0$.

18. Cho $I_a = \iint\limits_{D_a} e^{-x^2 - y^2}dxdy$, $J_a = \iint\limits_{\Delta_a} e^{-x^2 - y^2}dxdy$, trong đó D_a được xác định bởi $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq a^2$, Δ_a được xác định bởi $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$.

1) Tính I_a.

2) Chứng minh rằng $\forall a > 0$, $I_a \leq J_a \leq I_{a\sqrt{2}}$. Suy ra $\lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^a e^{-x^2}dx$.

19. Tính $\iint\limits_D (x + y)^3(x - y)^2dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x + y = 3$, $x - y = -1$.

20. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

1) $x = 4y - y^2$, $x + y = 6$

2) $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6 - x)^3$

3) $y = 2^x, y = -\frac{x}{2}, y = 4$

4) $r = a\cos\varphi$, $r = b\cos\varphi$ $(b > a > 0)$

5) $r = a\sin 2\varphi$.

6) $y = 0$ và một nhịp của đường xi-clô-it.

$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

21. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt

1) $z = x^2 + y^2, z = x + y$

2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z, x^2 + y^2 = z^2$.

22. Tính diện tích của phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2, z \geqslant 0$ nằm ở trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

23. Tính diện tích của phần mặt $z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ $(a > 0, b > 0)$ nằm ở trong mặt trụ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

24. Tính diện tích của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm ở trong hình trụ $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ $(a > 0)$.

25. Xác định trọng tâm của các bản phẳng đồng chất giới hạn bởi các đường :

1) $y^2 = 4x + 4, y^2 = -2x + 4$

2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$

3) $y^2 = x, x^2 = y$

4) $y = \sqrt{2x - x^2}, y = 0$

5) $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0)$.

26. Tính $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$, V là miền xác định bởi $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$, $x \leqslant y \leqslant 2x$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

27. Tính $\iiint\limits_V (1 - x - y - z)dxdydz$, V là miền xác định bởi $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x + y + z \leqslant 1.$

28. Tính $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, V là miền xác định bởi $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leqslant 1.$

29. Tính $\iiint\limits_V |xyz|dxdydz$, V là miền xác định bởi

$$x^2 + y^2 \leqslant 2z,\ 0 \leqslant z \leqslant a.$$

30. Tính $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, V là miền

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{3a^2} \leqslant 1.$$

31. Tính $\iiint\limits_V ydxdydz$, V là miền giới hạn bởi các mặt $y = \sqrt{x^2 + z^2},\ y = h\ (h > 0).$

32. Tính $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}}$, V là hình trụ

$$x^2 + y^2 \leqslant 1,\ -1 \leqslant z \leqslant 1.$$

33. Tính $\iiint\limits_V z^2dxdydz$, V là miền xác định bởi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2.$$

34. Tính $\iiint\limits_V x^2y^2z^2dxdydz$, V xác định bởi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1.$$

35. Tính $\iiint\limits_V (xy + yz + zx)dxdydz$, V xác định bởi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2.$$

36. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z,\ x^2 + y^2 = z^2.$$

37. Tính thể tích của vật thể xác định bởi

$$0 \leqslant \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1, \; -h \leqslant z \leqslant h.$$

38. Tính thể tích của vật thể xác định bởi

$$0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2, \; x^2 \leqslant y \leqslant 1.$$

39. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi 6 mặt phẳng

$$x + y + z = \pm 3,$$
$$x + 2y - z = \pm 1,$$
$$x + 4y + z = \pm 2.$$

40. Xác định trọng tâm G của vật thể giới hạn bởi các mặt

1) $x + y = 1, \; z = x^2 + y^2, \; x = 0, \; y = 0, \; z = 0$

2) $x^2 + y^2 = 2az, \; x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2, \; (z \geqslant 0, \; a > 0)$

3) $2x + 3y - 12 = 0, \; x = 0, \; y = 0, \; z = 0, \; z = \frac{1}{2}y^2.$

ĐÁP SỐ VÀ GỢI Ý

1. $I(y) = 1$ nếu $-\infty < y < 0$, $I(y) = 1 - 2y$ nếu $0 \leqslant y \leqslant 1$, $I(y) = -1$ nếu $1 < y < +\infty$.

2. $I(y)$ gián đoạn tại $y = 0$.

3. $(-1)^n \dfrac{n!}{(\alpha + 1)^{n+1}}$ (Đặt $I(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha dx$, tính $I'(\alpha), \ldots, I^{(n)}(\alpha)$).

5. 1) $\dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n} \dfrac{\pi}{2y^n\sqrt{y}}$; 2) $\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$; 3) $\sqrt{\pi}\,(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})$.

6. $\dfrac{\pi^2}{16}$.

7. 1) $\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$; 2) $\int_0^2 dx \int_1^3 f(x,y)dy + \int_2^6 dx \int_{x/2}^3 f(x,y)dy.$

8. $\frac{1}{36}$.

9. $-\frac{1}{504}$.

10. $\frac{9}{4}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

11. $\frac{8}{3}$.

12. $\frac{\pi}{4}abc^2$.

13. $\frac{64}{15}$.

14. $\frac{11\pi}{32}$.

15. 1) $\frac{14}{3}\pi a^3$; 2) $\frac{8a^3}{9}$.

16. $\frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

17. $\frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$.

18. 1) $\frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2})$;2) $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

19. $\frac{20}{3}$ (Đổi biến $x + y = u$, $x - y = v$).

20. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $38\frac{2}{5}$; 3) $\frac{97}{4} - \frac{7}{2\ln 2}$; 4) $\frac{\pi}{4}(b^2 - a^2)$;

5) $\frac{\pi a^2}{2}$; 6) $3\pi a^2$.

21. 1) $\frac{\pi}{8}$; 2) π.

22. $\pi\sqrt{2}$.

23. $\frac{\pi ab}{6}(5\sqrt{5} - 1)$.

24. $8a^2\left(\frac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2}\right)$.

25. 1) $\left(\frac{2}{5}, 0\right)$; 2) $\left(\frac{10}{3(\pi - 2)}, \frac{2}{\pi - 2}\right)$;

3) $\left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20}\right)$; 4) $\left(1, \frac{4}{3\pi}\right)$; 5) $\left(\frac{5a}{6}, 0\right)$.

26. $\frac{43}{3072}$.

27. $\frac{1}{4!}$.

28. $\frac{abc}{60}(a^2 + b^2 + c^2)$.

29. $\frac{1}{2}a^4$.

30. $\frac{4\pi a^5}{\sqrt{3}}$.

31. $\frac{\pi h^4}{4}$.

32. $\pi\left(3\sqrt{10} - 8 - \sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{10} - 3}\right)$.

33. $\frac{4\pi R^5}{15}$.

34. $\frac{4\pi(abc)^3}{945}$.

35. 0.

36. π.

37. $2\pi abh$.

38. $\frac{88}{105}$.

39. 8.

40. 1) $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{7}{30}\right)$; 2) $\left(0, 0, \frac{5a}{83}(6\sqrt{3} + 5)\right)$; 3) $\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

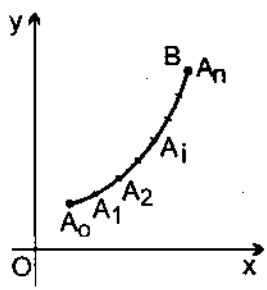
Chương IV

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG. TÍCH PHÂN MẶT

4.1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT

4.1.1. Định nghĩa

Cho hàm số f(M) = f(x,y) xác định trên một cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm $A_o = A$, A_1, A_2..., $A_n = B$ (hình 4. 1). Gọi độ dài cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ là Δs_i. Trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ lấy một điểm tùy ý $M_i(\zeta_i, \eta_i)$. Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta s_i \to 0$, tổng $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$ dần tới một giới hạn xác định, không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn điểm M_i trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$, thì giới hạn đó được gọi là *tích phân đường loại một* của hàm số f(x,y) dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$ và được ký hiệu là $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds$. Nếu tích phân ấy tồn tại ta nói rằng hàm số f(x, y) là *khả tích* trên $\overset{\frown}{AB}$.



Hình 4.1

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình y = f(x), $x_1 \leq x \leq x_2$, nó được gọi là *trơn* nếu hàm số $x \mapsto f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[x_1, x_2]$. Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình tham số x = x(t), y = y(t), $t_1 \leq t \leq t_2$, cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn nếu các hàm số $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[t_1, t_2]$.

Người ta chứng minh được rằng *nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn và nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì $f(x,y)$ khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$.*

Trong tích phân đường loại một, người ta không để ý đến chiều trên cung $\overset{\frown}{AB}$.

Nếu cung vật chất $\overset{\frown}{AB}$ có khối lượng riêng tại M(x, y) là $\rho(x, y)$ thì khối lượng của cung $\overset{\frown}{AB}$ bằng $\int_{\overset{\frown}{AB}} \rho(x, y)ds$ khi tích phân ấy tồn tại.

Chiều dài cung $\overset{\frown}{AB}$ được tính bằng $\int_{\overset{\frown}{AB}} ds$.

Tích phân đường loại một có các tính chất giống tích phân xác định.

Cung $\overset{\frown}{AB}$ được gọi là *trơn từng khúc* nếu nó gồm một số hữu hạn cung trơn. Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn từng khúc và nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì $f(x,y)$ cũng khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$.

4.1.2. Cách tính

Giả sử cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn và được cho bởi phương trình

$$y = y(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$$

và giả sử rằng hàm số $f(x, y)$ liên tục trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Gọi (x_i, y_i) là tọa độ của điểm chia A_i, $i = 1, 2, ..., n$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Khi Δx_i khá nhỏ, ΔS_i xấp xỉ bằng chiều dài đoạn thẳng $A_{i-1}A_i$:

$$\Delta S_i \approx \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\ \Delta x_i .$$

Theo công thức số gia giới nội

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{\Delta x_i} = y_i'(\xi_i),$$

trong đó $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$. Do đó

$$\Delta S_i \approx \sqrt{1 + y_i'^2(\xi_i)}\ \Delta x_i .$$

Gọi M_i là điểm $(\xi_i, y(\xi_i))$, nó nằm trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$. Ta có

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, y(\xi_i))\sqrt{1 + y'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i .$$

Vế phải là tổng tích phân của hàm số $x \mapsto f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}$ trải trên đoạn $[a, b]$, do đó

$$\lim_{\max\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, y(\xi_i))\sqrt{1 + y'^2(\xi_i)}$$

hay

$$(4.1)\quad \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx .$$

Ta đã đưa việc tính tích phân đường loại một về việc tính tích phân xác định của hàm số một biến số.

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t),\ y = y(t), \qquad t_1 \leq t \leq t_2,$$

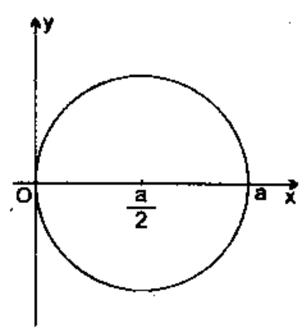
thì vì $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ nên từ công thức (4.1) ta suy ra

$$(4.2)\qquad \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt .$$

Ví dụ : Tính $I = \int_L \sqrt{x^2 + y^2}ds$, L là đường tròn $x^2 + y^2 = ax$ (hình 4.2).

Phương trình của đường tròn có thể viết là $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, vì vậy phương trình tham số của nó là

$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos t)\ ,\ y = \frac{a}{2}\sin t,\ -\pi \leq t \leq \pi.$$



Hình 4.2

Do đó

$$x'^2 + y'^2 = \frac{a^2}{4},$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}(1 + \cos t) = a^2\cos^2\frac{t}{2},$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a\left|\cos\frac{t}{2}\right| = a\cos\frac{t}{2}, \text{ vì } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{t}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt = a^2\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt = 2a^2\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} = 2a^2.$$

4.1.3. Trường hợp đường lấy tích phân là một đường trong không gian

Tích phân đường loại một của hàm số f(x,y,z) dọc theo một cung $\overset{\frown}{AB}$ trong không gian cũng được định nghĩa tương tự như trên.

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số là

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\quad t_1 \leq t \leq t_2$$

thì

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

và ta có công thức

$$(4.3)\qquad \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),\ y(t),\ z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

4.1.4. Trọng tâm của cung đường

Nếu khối lượng riêng của cung $\overset{\frown}{AB}$ tại M(x, y, z) là $\rho(M)$ thì các tọa độ của trọng tâm G của cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi công thức

$$(4.4)\quad x_G = \frac{1}{m}\int_{\overset{\frown}{AB}} x\rho(M)ds,\ y_G = \frac{1}{m}\int_{\overset{\frown}{AB}} y\rho(M)ds,\ z_G = \frac{1}{m}\int_{\overset{\frown}{AB}} z\rho(M)ds,$$

trong đó $m = \int_{\overset{\frown}{AB}} \rho(M)ds$ là khối lượng của cung $\overset{\frown}{AB}$.

4.2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

4.2.1. Định nghĩa

• *Công của một lực biến đổi.* Một chất điểm M di chuyển theo một cung phẳng L từ A đến B dưới tác dụng của một lực $\vec{F} = \vec{F}(M)$ biến thiên liên tục dọc theo $\overset{\frown}{AB}$. Hãy tính công W của lực ấy.

Chia $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm $A_o = A, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$. Gọi Δx_i, Δy_i là các thành phần của vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$. Nếu cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ khá nhỏ, có thể xem như lực $\vec{F}$ không đổi trên cung đó và bằng $\vec{F}(M_i)$, với $M_i(\xi_i, \eta_i)$ là một điểm nào đó trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$; xem cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ xấp xỉ như dây cung $A_{i-1}A_i$. Do đó công ΔW_i của lực $\vec{F}$ làm cho chất điểm di chuyển từ A_{i-1} đến A_i trên L xấp xỉ bằng $\Delta W_i = \vec{F}(M_i) \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i}$. Nếu hai thành phần của lực $\vec{F}(M)$ là P(M), Q(M) thì

$$\Delta W_i = P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i,$$

trong đó Δx_i, Δy_i là hai thành phần của $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$.

Nếu mọi cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ đều khá nhỏ, ta có

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \left[P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i\right]. \tag{4.5}$$

Phép tính gần đúng này càng chính xác nếu n càng lớn và các cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ đều càng nhỏ. Người ta định nghĩa công W của lực $\vec{F}$ làm cho chất điểm di chuyển từ A đến B trên đường L là giới hạn, nếu có, của tổng ở vế phải của (4.5) khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta s_i \to 0$, Δs_i là chiều dài cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$.

• *Định nghĩa tích phân đường loại hai.* Cho hai hàm số P(x,y), Q(x,y) xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm $A_0 = A, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$. Gọi hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ lên hai trục Ox, Oy là Δx_i, Δy_i ; $M_i(\xi_i, \eta_i)$ là một điểm tùy ý chọn trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$. Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta x_i \to 0$, $\max \Delta y_i \to 0$ tổng

$$\sum_{i=1}^{n} \left[P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i\right]$$

dần tới một giới hạn xác định, không phụ thuộc cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn điểm M_i trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$, thì giới hạn đó được gọi là *tích phân đường loại hai* của các hàm số P(x, y), Q(x,y) dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$ và được kí hiệu là

$$(4.6) \qquad \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy .$$

Người ta chứng minh được rằng *nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn và nếu các hàm số P(x, y), Q(x,y) liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì tích phân đường loại hai (4.6) tồn tại.*

Chú thích. Khác với tích phân đường loại một, trong tích phân đường loại hai, chiều trên đường lấy tích phân đóng vai trò quan trọng. Nếu ta đổi chiều trên đường lấy tích phân thì hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ lên hai trục Ox, Oy đổi dấu, do đó

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int_{\overset{\frown}{BA}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Nếu đường lấy tích phân là một đường kín L, ta quy ước chọn chiều dương trên L là chiều sao cho một người đi dọc L theo chiều ấy sẽ thấy miền giới hạn bởi L gần mình nhất ở về bên trái. Ta thường kí hiệu tích phân đường dọc theo đường cong kín L theo chiều dương là $\oint_L Pdx + Qdy$.

• *Tính chất.* Tích phân đường loại hai có các tính chất như tích phân xác định.

4.2.2. Cách tính

Giả sử cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn và được cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \; y = y(t),$$

Các mút A, B ứng với giá trị t_A, t_B của tham số. Giả sử các hàm số P(x, y), Q(x, y) liên tục trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Dùng kí hiệu ở 4.1.2, ta có

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau_i)\Delta t_i,$$

trong đó $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$. Gọi M_i là điểm $(x(\tau_i), y(\tau_i))$, nó nằm trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$. Ta có

$$\sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} P(x(\tau_i), y(\tau_i))x'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Vế phải là tổng tích phân của hàm số $t \mapsto P(x(t), y(t))x'(t)$ trải trên đoạn thẳng từ t_A đến t_B. Do đó

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx = \int_{t_A}^{t_B} P(x(t), y(t))x'(t)dt.$$

Tương tự

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x, y)dy = \int_{t_A}^{t_B} Q(x(t), y(t))y'(t)dt.$$

Vậy

$$(4.7)\quad \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $y = y(x)$, a là hoành độ của A, b là hoành độ của B, ta có

$$(4.8)\quad \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]dx.$$

Ví dụ 1 : Tính $I = \oint_L xdy - ydx$, L là đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Phương trình tham số của L là $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, chiều tăng của t ứng với chiều dương của L. Ta có $dx = -a\sin t dt$, $dy = b\cos t dt$, do đó

$$I = \int_0^{2\pi} \left[a\cos t \, . \, b\cos t - b\sin t(-a\sin t)\right]dt = \int_0^{2\pi} ab dt = 2\pi ab.$$

Ví dụ 2 : Tính $I = \int_L (x - y)dx + (x + y)dy$, L là đường nối điểm (0, 0) với điểm (1,1), nếu L là : 1) đường $y = x$, 2) đường $y = x^2$, 3) đường $y = \sqrt{x}$.

1) Trên đường $y = x$, ta có $dy = dx$, do đó $I = \int_0^1 2xdx = 1$;

2) Trên đường $y = x^2$, ta có $dy = 2xdx$, do đó

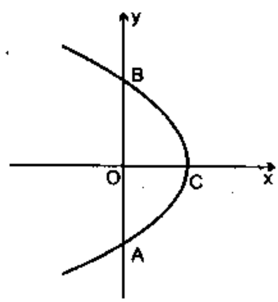
$$I = \int_0^1 (x + x^2 + 2x^3)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3};$$

3) Trên đường $y = \sqrt{x}$, ta có $x = y^2$, do đó $dx = 2ydy$, vậy

$$I = \int_0^1 (2y^3 - y^2 + y)dy = \left(\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 3 : Tính

$I = \int_L (2xy - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy$, L là cung của đường parabôn $y^2 = 1 - x$ từ điểm A (0, − 1) đến điểm B (0, 1) (hình 4.3).



Hình 4.3

Trên đường L, ta có $x = 1 - y^2$, do đó $dx = -2ydy$, vì vậy

$$I = \int_{-1}^{1} (2y^5 + 4y^4 - 4y^3 - 4y^2 + 2y + 1)\,dy =$$

$$= 2\int_0^1 (4y^4 - 4y^2 + 1)dy = 2\left(4\frac{y^5}{5} - 4\frac{y^3}{3} + y\right)\Big|_0^1 = \frac{14}{15}$$

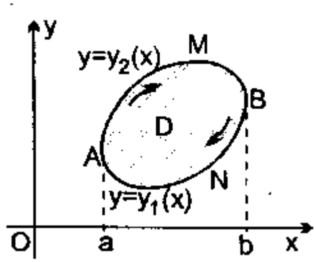
Trong ví dụ này, nếu ta muốn tính I bằng cách đưa về tính tích phân xác định theo x, thì ta phải chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành hai cung $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{CB}$, vì phương trình cung $\overset{\frown}{AC}$ là $y = -\sqrt{1-x}$, còn phương trình cung $\overset{\frown}{CB}$ là $y = \sqrt{1-x}$.

4.2.3. Công thức Green

D là một miền liên thông, bị chặn, có biên L gồm một hay nhiều đường kín trơn từng khúc, rời nhau từng đôi một. Công thức Green cho ta mối liên hệ giữa tích phân kép trong miền D và tích phân đường loại hai dọc theo L. Ta sẽ chứng minh rằng : *nếu các hàm số P(x,y), Q(x,y) và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền D thì ta có*

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy. \tag{4.9}$$

Đó là công thức Green.



Hình 4.4

• Trước hết giả sử rằng D là miền đơn liên và mọi đường thẳng song song với các trục tọa độ cắt L nhiều nhất tại hai điểm (hình 4.4). Vậy miền D được xác định bởi $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$. Theo công thức tính tích phân kép ta có

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy =$$

$$= \int_a^b P(x, y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx = \int_a^b P(x, y_2(x))dx - \int_a^b P(x, y_1(x))\, dx.$$

Nhưng theo công thức tính tích phân đường

$$\int_a^b P(x, y_2(x))dx = \int_{\overset{\frown}{AMB}} P(x, y)dx,$$

$$-\int_a^b P(x, y_1(x))\,dx = -\int_{\overset{\frown}{ANB}} P(x, y)dx = \int_{\overset{\frown}{BNA}} P(x, y)dx.$$

Do đó

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \int_{\overset{\frown}{AMBNA}} P(x, y)dx = -\oint_L P(x, y)dx.$$

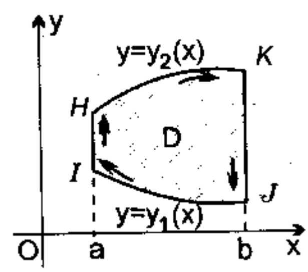
Chiều mũi tên trên hình 4.4 ứng với các tích phân đường trong chứng minh này.

Tương tự ta có

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \oint_L Q(x, y)dy.$$

Từ hai kết quả này suy ra công thức Green.

● Bây giờ giả sử rằng miền đơn liên D có biên là đường L gồm hai cung $\overset{\frown}{IJ}$, $\overset{\frown}{KH}$ có phương trình theo thứ tự là $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $a \leq x \leq b$ và hai đoạn thẳng IH và KJ song song với Oy (hình 4.5). Tương tự như trên ta được



Hình 4.5

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_{HK} P(x,y)dx + \int_{JI} P(x,y)dx.$$

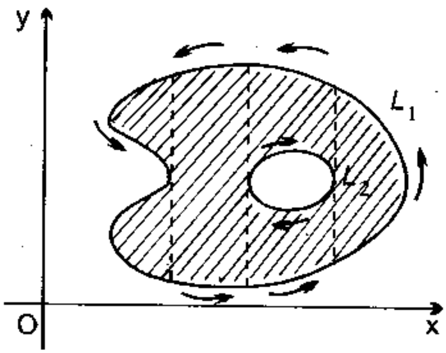
Nhưng $\int_{IH} P(x,y)dx = 0$, $\int_{KJ} P(x,y)dx = 0$, vì dọc IH và KJ ta có $dx = 0$. Do đó

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_{HK} Pdx + \int_{KJ} Pdx + \int_{JI} Pdx + \int_{IH} Pdx = -\oint_L P(x, y)dx.$$

Còn đương nhiên ta có

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint_L Q(x, y)dy.$$

Từ đó suy ra công thức Green.



Hình 4.6

● Bây giờ xét trường hợp miền D đa liên. Chẳng hạn biên của nó gồm hai đường kín L_1, L_2 rời nhau như ở hình 4.6. Chia miền D thành sáu miền nhỏ mà biên của chúng đều thỏa mãn các giả thiết đã nêu.

Áp dụng công thức (4.9) cho cả 6 miền nhỏ ấy rồi cộng lại, ta được

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx + Qdy,$$

vì tổng các tích phân đường của Pdx + Qdy trên cùng một cung hai lần theo hai chiều ngược nhau bằng không. Vì L gồm hai đường kín L_1, L_2 rời nhau, nên chiều dương trên L phải chọn theo quy ước đã nêu ở mục 4.2.1 : chiều dương trên L_1 là ngược chiều kim đồng hồ, chiều dương trên L_2 là thuận chiều kim đồng hồ.

Ví dụ : Tính $I = \oint_L (x\text{arctg}x + y^2)\,dx + (x + 2yx + y^2e^{-y})\,dy$, L là đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$.

Áp dụng công thức Green. Ta có $P = x\text{arctg}x + y^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$; $Q = x + 2yx + y^2e^{-y} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + 1$. Do đó

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D dxdy = S,$$

S là diện tích của miền D. Vì D là miền tròn có bán kính bằng 1, nên I = S = π.

Hệ quả của công thức Green : Nếu đường kín L là biên của miền D thì diện tích S của miền ấy được cho bởi công thức

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx \quad (4.10)$$

Thật vậy, chỉ việc áp dụng công thức Green vào P = − y, Q = x.

Ví dụ : Diện tích của hình elip giới hạn bởi đường $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ bằng πab (xem ví dụ 1, mục 4.2.2).

4.2.4. Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân

Qua ví dụ 2 của mục 4.2.2, ta thấy rằng tích phân đường $\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ không những phụ thuộc vào hai mút A, B mà còn phụ thuộc cả vào đường AB. Trong mục này ta sẽ tìm xem với điều kiện nào thì tích phân đường chỉ phụ thuộc vào hai mút A, B, mà không phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

Ta sẽ thấy rằng tích phân đường $\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Qdy$ chỉ phụ thuộc hai mút A, B mà không phụ thuộc đường lấy tích phân khi và chỉ khi $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (*), và điều kiện (*) cũng là điều kiện ắt có và đủ để Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của một hàm số nào đó.

Định lí. Giả sử hai hàm số P(x, y), Q(x, y) liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong một miền đơn liên D nào đó. Khi đó bốn mệnh đề sau đây tương đương với nhau :

1) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\forall(x,y) \in D$.

2) $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$ *dọc theo mọi đường kín L nằm trong D.*

3) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}$ *$Pdx + Qdy$, trong đó $\overset{\frown}{AB}$ là một cung nằm trong D, chỉ phụ thuộc hai mút A, B mà không phụ thuộc đường đi từ A đến B.*

4) *Biểu thức $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó trong miền D.*

Chứng minh. Ta chứng minh định lí theo sơ đồ sau :

$$1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$$

• 1) ⇒ 2). Giả sử L là một đường kín nằm trong D. Gọi D_1 là miền giới hạn bởi L. Áp dụng công thức Green, ta có

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

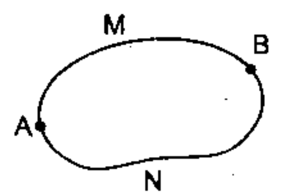
vì theo giả thiết 1) ta có $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\forall(x, y) \in D$.

• 2) ⇒ 3). Giả sử $\overset{\frown}{AMB}$ và $\overset{\frown}{ANB}$ là hai đường bất kì nối A với B, nằm trong miền D (hình 4.7). Theo giả thiết 2) ta có

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AMBNA}} Pdx + Qdy = 0$$

hay

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AMB}} Pdx + Qdy + \int\limits_{\overset{\frown}{BNA}} Pdx + Qdy = 0.$$



Hình 4.7

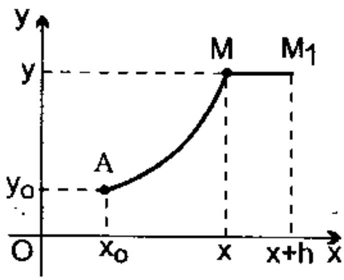
Suy ra

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AMB}} Pdx + Qdy = -\int\limits_{\overset{\frown}{BNA}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\overset{\frown}{ANB}} Pdx + Qdy.$$

Vậy $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc hai mút A, B, mà không phụ thuộc đường đi từ A đến B.

• 3) ⇒ 4) . Giả sử $A(x_o, y_o)$ là một điểm cố định trong D, M(x, y) là một điểm chạy trong D. Xét hàm số

(4.11) $$u(x, y) = \int_{\overset{\frown}{AM}} Pdx + Qdy + C, \text{ C là hằng số tùy ý.}$$



Hình 4.8

Hàm số ấy hoàn toàn xác định vì tích phân ở vế phải không phụ thuộc đường lấy tích phân. Điểm M_1 $(x + h, y) \in D$ với h khá nhỏ.

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\int_{\overset{\frown}{AM_1}} Pdx + Qdy - \int_{AM} Pdx + Qdy\right].$$

Chọn $\overset{\frown}{AM_1}$ gồm cung $\overset{\frown}{AM}$ và đoạn thẳng MM_1 song song với trục Ox (hình 4.8), ta được

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{MM_1} Pdx + Qdy = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} P(\xi, y)\, d\xi.$$

Theo định lí về giá trị trung bình đối với tích phân xác định, ta có

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} P(\xi, y) d\xi = P(\bar{x}, y), \; \bar{x} = x + \theta h, \; 0 < \theta < 1.$$

Khi $h \to 0$ thì $\bar{x} \to x$, do đó $P(\bar{x}, y) \to P(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = P(x, y).$$

Tương tự như vậy có thể chứng minh được rằng $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) =$ $= Q(x, y)$, do đó $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm số u(x,y) cho bởi công thức (4.11).

• 4) ⇒ 1). Giả sử Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của một hàm số u(x,y) nào đó. Khi đó

$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q = \frac{\partial u}{\partial y},$$

do đó $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. Các hàm số ấy liên tục trong D, nên theo định lí Schwarz, chúng bằng nhau

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Hệ quả 1. Nếu Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của hàm số u(x,y) thì

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u(B) - u(A)$$

dọc theo mọi đường $\overset{\frown}{AB}$ nằm trong miền D.

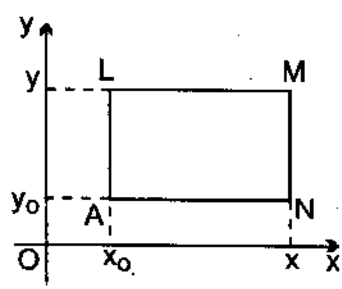
Hệ quả 2. Nếu D là toàn bộ $\mathbf{R}^2$ thì Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của hàm số u(x,y) cho bởi công thức

$$(4.12) \qquad u(x,y) = \int_{x_o}^{x} P(x, y_o)dx + \int_{y_o}^{y} Q(x, y)dy + C$$

hoặc

$$(4.12') \qquad u(x, y) = \int_{y_o}^{y} Q(x_o, y)dy + \int_{x_o}^{x} P(x, y)dx + C$$

Thậy vậy, vì tích phân ở vế phải của công thức (4.11) không phụ thuộc đường lấy tích phân nên nếu chọn đường lấy tích phân AM là đường gấp khúc ANM (hình 4.9) ta được công thức (4.12), nếu chọn đường lấy tích phân là đường gấp khúc ALM ta được công thức (4.12').



Hình 4.9

Ví dụ 1 : Chứng minh rằng biểu thức $6xe^y dx + (3x^2 + y + 1)e^y dy$ là vi phân toàn phần của một hàm số nào đó. Tìm hàm số ấy.

Ta có $P = 6xe^y$, $Q = (3x^2 + y + 1)e^y \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = 6xe^y = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Vậy Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của một hàm số u(x, y) nào đó xác định trên toàn $\mathbf{R}^2$. Áp dụng công thức (4.12') với $x_o = y_o = 0$, ta được

$$u(x,y) = \int_0^y (y+1)e^y dy + \int_0^x 6xe^y dx + C =$$

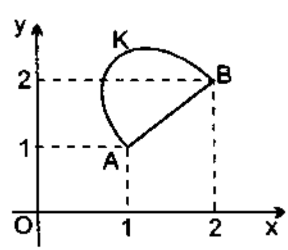
$$= (y+1)\,e^y \Big|_o^y - \int_0^y e^y\,dy + 3x^2 e^y + C = e^y(y + 3x^2) + C.$$

Ví dụ 2 : Biểu thức P(x,y)dx + Q(x,y)dy, trong đó $P(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ là một vi phân toàn phần trong mọi miền đơn liên không chứa gốc tọa độ, vì

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

và vì P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ không liên tục tại (0, 0). Nếu $\overset{\frown}{AB}$ là đoạn thẳng nối hai điểm A(1, 1), B(2, 2) thì vì phương trình của đường thẳng đi qua AB là y = x, ta có :

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_1^2 \frac{2ydy}{2y^2} = \int_1^2 \frac{dy}{y} = \ln 2.$$



Hình 4.10

Do đó với mọi cung $\overset{\frown}{AKB}$ tạo thành cùng với đoạn thẳng AB một đường kín giới hạn một miền không chứa gốc O, ta có :

$$\int_{\overset{\frown}{AKBA}} Pdx + Qdy = 0.$$

Do đó :

$$\int_{\overset{\frown}{AKB}} Pdx + Qdy = \int_{AB} Pdx + Qdy = \ln 2.$$

Gọi L là đường tròn tâm O bán kính R, phương trình tham số của nó là x = Rcost, y = Rsint, ta có

$$\oint_L Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} \left[-(\cos t - \sin t)\sin t + (\cos t + \sin t)\cos t \right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Tích phân này khác không, vì mặt tròn giới hạn bởi L chứa điểm gốc, tại đó các giả thiết của định lí không được thỏa mãn.

Bạn đọc hãy chứng minh rằng $\int$ Pdx + Qdy dọc theo mọi đường kín đơn (tức là không tự giao) bao quanh gốc O theo chiều thuận đều bằng 2π.

4.2.5. Trường hợp đường lấy tích phân là một đường trong không gian

Nếu $\overset{\frown}{AB}$ là một cung trong không gian, P(x, y, z), Q(x, y, z), R (x, y, z) là ba hàm số xác định trên $\overset{\frown}{AB}$, người ta định nghĩa tích phân đường loại hai

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

tương tự như tích phân đường loại hai trong mặt phẳng.

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình tham số x = x(t), y = y(t) , z = z(t), các mút A, B ứng với các giá trị t_A, t_B của tham số, ta có công thức tính :

$$I = \int_{t_A}^{t_B} \Big[P(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\, z'(t) \Big] dt.$$

Chú thích. Phương trình tham số của cung $\overset{\frown}{AB}$ có thể viết dưới dạng vectơ

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Khi ấy ta có

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Gọi $\vec{F}(x, y, z)$ là vectơ có các tọa độ là $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$. Khi ấy tích phân đường

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

có thể viết dưới dạng vectơ

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}.d\vec{r}.$$

4.3. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI MỘT

4.3.1. Định nghĩa

Cho một mặt cong S và một hàm số $f(M) = f(x, y, z)$ xác định trên S. Chia S thành n mảnh nhỏ. Gọi tên và cả diện tích của các mảnh ấy là ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n. Trong mỗi mảnh ΔS_i lấy một điểm tùy ý $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$, d_i là đường kính của ΔS_i, tổng $\sum_{i=1}^{n} f(M_i).\Delta S_i$ dần tới một giới hạn xác định không phụ thuộc cách chia mặt S và cách lấy điểm M_i trên ΔS_i thì giới hạn đó được gọi là *tích phân mặt loại một* của hàm số $f(x,y,z)$ trên mặt S và được kí hiệu là

$$\iint_S f(x, y, z)dS.$$

Người ta chứng minh được rằng *nếu mặt S trơn (tức là liên tục và có pháp tuyến biến thiên liên tục) và nếu hàm số f(x, y, z) liên tục trên mặt S thì tồn tại tích phân* $\iint_S f(x, y, z)dS$.

Nếu mặt S có khối lượng riêng tại M(x,y,z) là $\rho(x, y, z)$ thì khối lượng của mặt S bằng $\iint\limits_S \rho(x, y, z)dS$.

Tích phân mặt $\iint\limits_S dS$ cho ta diện tích của mặt S.

Tích phân mặt loại một có các tính chất giống như tích phân kép.

4.3.2. Cách tính

Giả sử mặt S được cho bởi phương trình $z = z(x, y)$, trong đó z(x,y) là một hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng $p = z'_x(x, y)$, $q = z'_y(x, y)$ liên tục trong một miền đóng giới nội D, hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy. Cho hàm số f(x,y,z) liên tục trên mặt S. Chia S thành n mảnh nhỏ $\Delta S_1, \ldots, \Delta S_n$. $M_i(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i))$ là một điểm tùy ý chọn trên ΔS_i. Gọi $\Delta\sigma_i$ là hình chiếu của ΔS_i lên mặt phẳng xOy. Nếu đường kính của ΔS_i khá nhỏ, có thể xấp xỉ ΔS_i bởi mảnh ΔT_i của tiếp diện của mặt S tại M_i mà hình chiếu của nó lên mặt phẳng xOy cũng là $\Delta\sigma_i$ (xem mục 3.2.4). Do đó

$$\Delta S_i \approx \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}\,\Delta\sigma_i$$

trong đó $p_i = z_x'(\xi_i, \eta_i)$, $q_i = z_y'(\xi_i, \eta_i)$. Vậy

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i))\sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}\,\Delta\sigma_i$$

Vế phải là tổng tích phân của hàm số

$$(x, y) \longmapsto f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)}$$

trải trên miền D. Do đó

$$(4.13)\quad \iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dxdy,$$

trong đó $p = z_x'(x, y)$; $q = z_y'(x, y)$. Việc tính tích phân mặt loại một đã được đưa về tính tích phân kép.

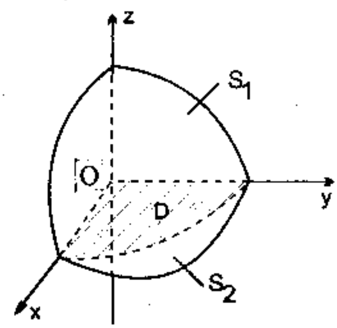
Ví dụ : Tính $I = \iint_S z^2(x^2 + y^2)\, dS$, S là phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ứng với $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ (hình 4.11).

Chia S thành hai phần : S_1 ứng với $z \geqslant 0$, có phương trình $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ và S_2 ứng với $z < 0$, có phương trình $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Ta có

$I = I_1 + I_2$,

$I_i = \iint_{S_i} z^2(x^2 + y^2)\, dS$, $i = 1, 2$.

Trên S_1 ta có $p = -\dfrac{x}{z}$, $q = -\dfrac{y}{z} \Rightarrow$



Hình 4.11

$1 + p^2 + q^2 = \dfrac{a^2}{z^2}$. Theo công thức (4.13)

ta được

$$I_1 = a \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,(x^2 + y^2)\, dxdy,$$

D là một phần tư hình tròn tâm O bán kính a nằm trong góc phần tư thứ nhất. Chuyển sang tọa độ cực để tính tích phân kép, ta được

$$I_1 = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\, r^3\, dr.$$

Đặt $r = a\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, ta có

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\; r^3 dr = a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^2 t\, dt = \frac{2a^5}{15}.$$

Do đó

$$I_1 = a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2a^5}{15} = \frac{\pi a^6}{15}.$$

Tương tự $I_2 = \dfrac{\pi a^6}{15}$, do đó $I = \dfrac{2\pi a^6}{15}$.

4.3.3. Trọng tâm của mặt

Nếu khối lượng riêng của mặt S tại điểm M(x, y, z) là $\rho(M)$ thì các tọa độ của trọng tâm G của mặt S được cho bởi công thức

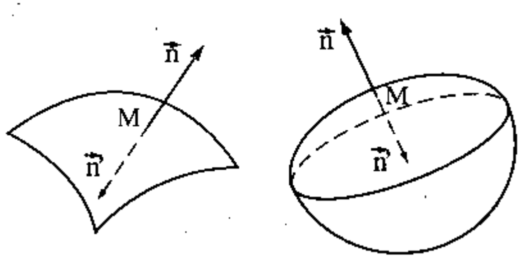
$$(4.14)\quad x_G = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(M)dS,\ y_G = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(M)dS,\ z_G = \frac{1}{m}\iint_S z\rho(M)dS$$

trong đó $m = \iint_S \rho(M)dS$ là khối lượng của mặt S.

4.4. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

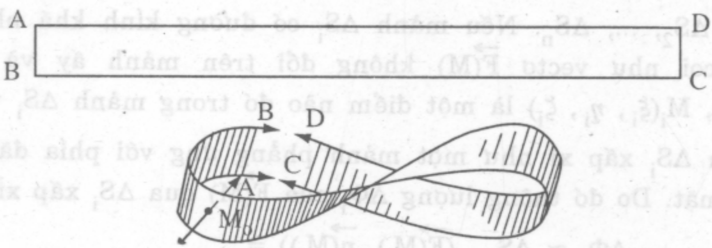
4.4.1. Định nghĩa

- Cho mặt S. Tại mỗi điểm chính quy M của S, có hai vectơ pháp đơn vị $\vec{n}$ và $\vec{n'} = -\vec{n}$ (hình 4.12). Nếu có thể chọn



Hình 4.12

được tại mỗi điểm M của S một vectơ pháp đơn vị $\vec{n}$ sao cho vectơ $\vec{n}$ biến thiên liên tục trên S, ta nói rằng mặt S *định hướng* được và hướng của mặt S được xác định bởi hướng của $\vec{n}$. Dải Möbius mà ta dựng sau đây là một ví dụ của mặt không định hướng được. Lấy một băng giấy dài hình chữ nhật ABCD (hình 4.13). Xoắn băng giấy ấy nửa vòng theo chiều dài rồi gắn C với A, D với B. Khi điểm M chạy một vòng trên dải Möbius, xuất phát từ vị trí M_o thì lúc gặp lại M_o vectơ $\vec{n}$ đổi hướng. Do đó $\vec{n}$ không biến thiên liên tục trên dải Möbius.



Hình 4.13

Trong mục này ta chỉ xét những mặt định hướng được. Chẳng hạn, nếu S là một mặt kín không tự cắt thì vectơ $\vec{n}$ có thể hướng ra ngoài hoặc hướng vào trong, tức là ta xét mặt S hướng ra ngoài hay hướng vào trong.

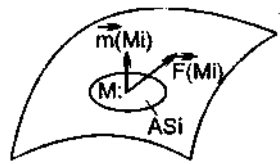
• Ta nói rằng trong miền $V \subset \mathbf{R}^3$ xác định một trường vectơ nếu ứng với mỗi điểm M(x, y, z) ∈ V có một vectơ $\vec{F}(M)$ xác định gốc tại M, với các tọa độ P(M), Q(M), R(M) là những hàm số của M.

• Giả sử trong V cho một mặt định hướng S với $\vec{n}$ là vectơ pháp đơn vị. Nếu vectơ $\vec{F}$ không đổi, S là một miền phẳng định hướng có diện tích cũng được kí hiệu là S, người ta gọi *thông lượng* Φ của trường vectơ $\vec{F}$ qua mặt S là tích

$$\Phi = S.|\vec{F}|.\cos(\vec{n}, \vec{F}) = S.(\vec{F}.\vec{n})$$

Nếu $\overrightarrow{v}$ là vận tốc của chất lỏng có mật độ ρ chảy qua mặt S thì thông lượng Φ của trường vectơ $\overrightarrow{F} = \rho\overrightarrow{v}$ biểu thị khối lượng của chất lỏng chảy qua S trong một đơn vị thời gian.

Bây giờ giả sử trường vectơ $\overrightarrow{F}(M)$ biến thiên liên tục trong V, nghĩa là các tọa độ P(M), Q(M), R(M) của nó là những hàm số liên tục trong V. Hãy tính thông lượng Φ của $\overrightarrow{F}(M)$ qua mặt định hướng S. Ta chia S thành n mảnh nhỏ. Gọi tên và cả diện tích của những mảnh ấy là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Nếu mảnh ΔS_i có đường kính khá nhỏ, có thể coi như vectơ $\overrightarrow{F}(M)$ không đổi trên mảnh ấy và bằng $\overrightarrow{F}(M_i)$, $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ là một điểm nào đó trong mảnh ΔS_i và coi mảnh ΔS_i xấp xỉ như một mảnh phẳng ứng với phía đã chọn của mặt. Do đó thông lượng $\Delta\Phi_i$ của $\overrightarrow{F}(M)$ qua ΔS_i xấp xỉ bằng



Hình 4.14

$$\Delta\Phi_i \approx \Delta S_i \,.\, (\overrightarrow{F}(M_i)\,.\,\overrightarrow{n}(M_i)) =$$

$$= \Delta S_i\,[P(M_i)\cos\alpha_i + Q(M_i)\cos\beta_i + R(M_i)\cos\gamma_i],$$

trong đó $\alpha_i = (\overrightarrow{n}(M_i), Ox)$, $\beta_i = (\overrightarrow{n}(M_i), Oy)$, $\gamma_i = (\overrightarrow{n}(M_i), Oz)$.

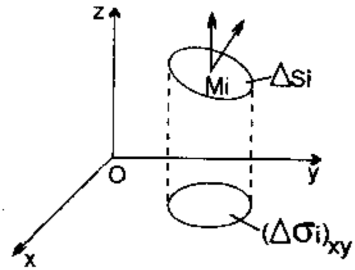
Nếu các mảnh ΔS_i đều có đường kính khá nhỏ, ta có

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} [P(M_i)\cos\alpha_i + Q(M_i)\cos\beta_i + R(M_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i.$$

Phép tính gần đúng này càng chính xác nếu n càng lớn và các mảnh ΔS_i có đường kính càng nhỏ. Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$, d_i là đường kính của ΔS_i, mà tổng ở vế phải của hệ thức trên dần tới một giới hạn xác định I không phụ thuộc cách chia miền S và cách lấy điểm M_i trên ΔS_i, thì I được gọi là thông lượng của $\overrightarrow{F}(M)$ qua mặt S. Trong toán học, giới hạn ấy được gọi là *tích phân mặt loại hai* của các hàm số P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) trên mặt S và được kí hiệu là

(4.15) $$\iint_S [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]dS$$

Gọi $(\Delta\sigma_i)_{xy}$, $(\Delta\sigma_i)_{yz}$, $(\Delta\sigma_i)_{zx}$ theo thứ tự là hình chiếu của ΔS_i lên các mặt phẳng Oxy, Oyz, Ozx, ta có $(\Delta\sigma_i)_{xy} = \Delta S_i\cos\gamma_i$, $(\Delta\sigma_i)_{yz} = \Delta S_i\cos\alpha_i$, $(\Delta\sigma_i)_{zx} = \Delta S_i\cos\beta_i$. Do đó tích phân mặt (h. 4.15) còn có thể được kí hiệu là



Hình 4.15

(4.16) $$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

Người ta chứng minh được rằng *nếu S là mặt định hướng liên tục mà vectơ pháp tuyến tương ứng biến thiên liên tục và nếu các hàm số P, Q, R liên tục trên mặt S thì tích phân mặt (4.16) tồn tại.*

Nếu ta đổi hướng mặt S thì tích phân mặt loại hai (4.16) đổi dấu, vì khi ấy các cosin chỉ hướng của $\vec{n}$ đổi dấu.

Ngoài ra, tích phân mặt loại hai có các tính chất tương tự như tích phân kép.

Chú thích. Nếu $\vec{F}(x, y, z)$ là vectơ có các thành phần là $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ thì tích phân mặt loại hai (4.15) có thể viết là

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\, dS.$$

4.4.2. Cách tính

Người ta cũng tính tích phân mặt loại hai bằng cách đưa nó về tích phân kép. Chẳng hạn, xét tích phân mặt

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy.$$

Giả sử mặt S có phương trình là $z = f(x, y)$, f có các đạo hàm riêng liên tục trên D, hình chiếu của S xuống mặt phẳng $z = 0$. Giả sử hàm số R liên tục trên S. Sử dụng các kí hiệu của mục 4.4.1, $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ là một điểm nào đó trên mảnh Δs_i. Ta có

$$\sum_{i=1}^{n} R(M_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i))\,(\Delta\sigma_i)_{xy},$$

$(\Delta\sigma_i)_{xy} > 0$ nếu $\cos\gamma_i > 0$, $(\Delta\sigma_i)_{xy} < 0$ nếu $\cos\gamma_i < 0$. Vậy vế phải của đẳng thức trên là tổng tích phân của hàm số

$$(x, y) \longmapsto \varepsilon R(x, y, f(x, y))$$

trải trên miền D, $\varepsilon = 1$ nếu $\cos\gamma > 0$, $\varepsilon = -1$ nếu $\cos\gamma < 0$. Do đó

(4.17) $$\iint_S R(x, y, z)dxdy = \iint_D R(x, y, f(x, y))dxdy$$

nếu vectơ pháp $\vec{n}$ làm với Oz một góc nhọn,

(4.17') $$\iint_S R(x, y, z)dxdy = -\iint_D R(x, y, f(x, y))dxdy$$

nếu $\vec{n}$ làm với Oz một góc tù.

Các tích phân $\iint_S Q(x, y, z)dzdx$, $\iint_S P(x, y, z)dydz$ cũng được tính tương tự.

Ví dụ 1 : Tính $I = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Vì phương trình của mặt cầu và biểu thức dưới dấu tích phân không đổi khi ta hoán vị vòng quanh x, y, z, nên ta có

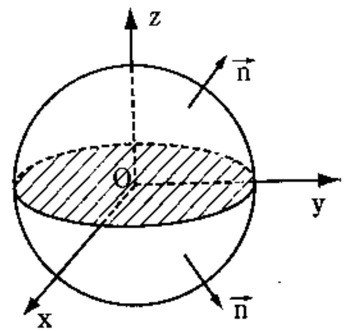
$$\iint_S xdydz = \iint_S ydzdx = \iint_S zdxdy.$$

Do đó

$$I = 3\iint_S zdxdy = 3\left[\iint_{S_1} zdxdy + \iint_{S_2} zdxdy\right]$$

trong đó S_1 là nửa trên của mặt cầu, có phương trình

$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, S_2 là nửa dưới của mặt cầu có phương trình $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Vì vectơ pháp tuyến của nửa mặt cầu trên làm với Oz một góc nhọn, vectơ pháp tuyến của nửa mặt cầu dưới làm với Oz một góc tù (hình 4.16) nên ta được



Hình 4.16

$$I = 6 \iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy,$$

D là hình tròn tâm O bán kính R trong mặt phẳng Oxy. Chuyển sang tọa độ cực, ta được

$$I = 6 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r dr = 4\pi R^3.$$

Ví dụ 2 : Tính $I = \iint\limits_S (y - z)\, dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy$,

S là phía ngoài của mặt nón $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$ (h không đổi) (hình 4.17).

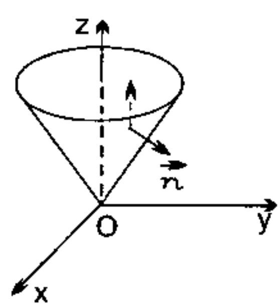
Ta tìm cách chuyển tích phân này sang tích phân mặt loại một. Lấy đạo hàm hai vế phương trình $z^2 = x^2 + y^2$ lần lượt đối với x và y, ta được

$$2zz'_x = 2x,\ 2zz'_y = 2y \Rightarrow$$

$$p = z'_x = \frac{x}{z},\ q = \frac{y}{z},$$

$$1 + p^2 + q^2 = 1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2} = 2.$$

Vậy ba cosin chỉ hướng của vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ là $\frac{x}{z\sqrt{2}}, \frac{y}{z\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$, vì $\vec{n}$ làm với Oz một góc tù. Do đó



Hình 4.17

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint\limits_S \left[(y-z)\frac{x}{z} + (z-x)\frac{y}{z} - (x-y)\right] dS = \sqrt{2} \iint\limits_S (y - x) dS = 0$$

vì mặt S đối xứng đối với các mặt phẳng x = 0, y = 0 và hàm số dưới dấu tích phân là lẻ đối với x và y.

4.4.3. Công thức Stokes

Ở 4.2 đã chứng minh công thức Green, nó cho ta mối liên hệ giữa tích phân đường loại 2 theo một đường phẳng kín L với tích phân kép trong miền D giới hạn bởi L. Công thức Stokes dưới đây cho ta mối liên hệ giữa tích phân đường loại 2 theo một đường kín L trong không gian với tích phân mặt loại 2 trên một mặt định hướng S giới hạn bởi L. Đó là kết quả mở rộng công thức Green sang không gian $\mathbf{R}^3$.

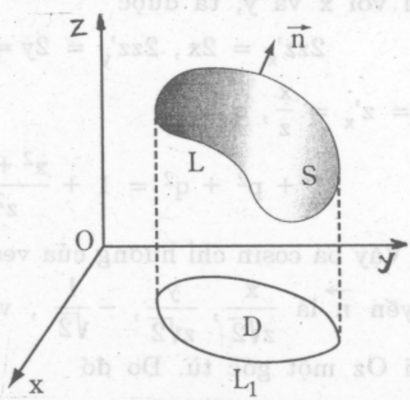
Giả sử S là một mặt định hướng trơn từng mảnh, biên của nó là một đường kín L trơn từng khúc. Nếu các hàm số P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trên S thì ta có

$$(4.18) \quad \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz,$$

chiều lấy tích phân trên L được chọn sao cho một người đi dọc theo L theo chiều ấy nhìn thấy mặt S kề với mình ở bên trái.

Chứng minh. Ta chứng minh công thức Stokes trong trường hợp S có phương trình là z = f(x, y), trong đó f có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong miền D (hình 4.18). gọi L_1 là biên của miền D. Giả sử phương trình tham số của L_1 là

$$x = x(t),\ y = y(t),\ a \leqslant t \leqslant b.$$



Hình 4.18

Khi đó phương trình tham số của L là

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = f(x(t), y(t)),\ a \leqslant t \leqslant b$$

Đặt

$$I = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

Ta có

$$I = \int_a^b \left[Px'(t) + Qy'(t) + R\left(\frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t)\right)\right]dt =$$

$$= \int_a^b \left[\left(P + R\frac{\partial f}{\partial x}\right)x'(t) + \left(Q + R\frac{\partial f}{\partial y}\right)y'(t)\right]dt =$$

$$= \int_{L_1} \left(P + R\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(Q + R\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy.$$

Biểu thức cuối cùng là một tích phân đường trên đường kín phẳng. Áp dụng công thức Green, ta được

$$I = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]dxdy.$$

Tính biểu thức dưới dấu tích phân kép, ta được

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} -$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + R\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Do đó

$$I = \iint_D \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

Các cosin chỉ phương của pháp tuyến của mặt S là

$$-\frac{f'_x}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1}},\ -\frac{f'_y}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1}},\ \frac{1}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1}}$$

Vì vậy

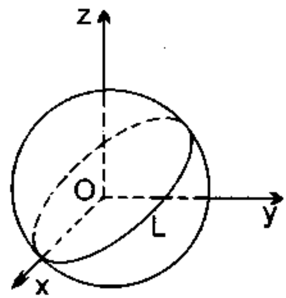
$$-\frac{\partial f}{\partial x}\,dxdy = dydz,\ -\frac{\partial f}{\partial y}\,dxdy = dzdx.$$

Cuối cùng ta được

$$I = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Ví dụ : Tính $I = \oint\limits_L ydx + zdy + xdz$,

L là giao tuyến của hai mặt $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, chiều trên L là ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn về phía $z > 0$ (hình 4.19)



Hình 4.19

$x + y + z = 0$ là phương trình của một mặt phẳng đi qua gốc O nên L là một đường tròn lớn của mặt cầu. Áp dụng công thức Stokes với S là mặt phẳng $x + y + z = 0$ giới hạn bởi L, hướng về phía $z > 0$. Ta có $P = y \Rightarrow P'_z = 0$, $P'_y = 1$; $Q = z \Rightarrow Q'_x = 0$, $Q'_z = 1$; $R = x \Rightarrow R'_y = 0$, $R'_x = 1$.

Công thức Stokes cho ta

$$I = -\iint\limits_S dydz + dzdx + dxdy.$$

Chuyển sang tích phân mặt loại một, ta có $z = -x - y \Rightarrow p = -1$, $q = -1$. Vậy các cosin chỉ hướng của vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ tương ứng của S là $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ vì $\vec{n}$ làm với Oz một góc nhọn, do đó

$$I = -\sqrt{3}\iint\limits_S dS = -\pi\sqrt{3}a^2,$$

vì S là mặt tròn bán kính bằng a.

4.4.4. Vectơ rôta

• Cho trường vectơ $\vec{F}(M)$ có các tọa độ là P(M), Q(M), R(M). Người ta gọi *vectơ rôta* (hay *vectơ xoáy*) của $\vec{F}$ là vectơ có các tọa độ là

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

và kí hiệu là $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}$. Vậy

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Để dễ nhớ, người ta thường viết biểu thức của $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}$ bằng định thức cấp ba tượng trưng sau :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Bằng cách viết đó, có thể dễ dàng chứng minh được rằng : *nếu f là hàm số ba biến số có các đạo hàm riêng liên tục thì*

(4.19) $\qquad \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = 0$

Thật vậy, ta có

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

• Người ta gọi lưu số của $\vec{F}$ dọc theo đường kín L là tích phân đường

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

trong đó $\vec{r} = \vec{r}(t)$ là phương trình tham số dạng vectơ của L.

Khi đó công thức stokes có thể phát biểu như sau : *lưu số của* $\vec{F}$ *dọc theo một đường kín* L *bằng thông lượng của* $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}$ *qua một mặt định hướng* S *có biên là* L

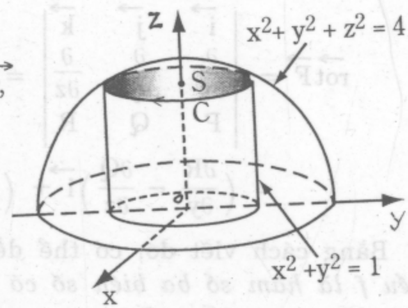
$$\int_L \overrightarrow{F}.\, d\overrightarrow{r} = \iint_S \overrightarrow{rot}\overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}dS,$$

$\overrightarrow{n}$ là vectơ pháp đơn vị của mặt định hướng S.

Ví dụ. Cho $\overrightarrow{F}(x, y, z) = yz\overrightarrow{i} + zx\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}$. Tính thông lượng ϕ của $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F}$ qua phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ hướng vào trong, nằm ở trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$, ứng với $z > 0$ (hình 4.20).

Theo công thức Stokes, ta có

$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{rot}\overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}dS = \int_L \overrightarrow{F}.\, d\overrightarrow{r},$$



Hình 420

L là đường tròn, giao tuyến của mặt cầu và mặt trụ. Dễ dàng thấy rằng phương trình tham số của L là $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sqrt{3}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Vậy phương trình vectơ của L là

$$\overrightarrow{r}(t) = \cos t.\overrightarrow{i} + \sin t.\overrightarrow{j} + \sqrt{3}.\overrightarrow{k}.$$

Do đó

$$\overrightarrow{r}'(t) = -\sin t.\overrightarrow{i} + \cos t.\overrightarrow{j}. \text{ Mặt khác}$$
$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) = \sqrt{3}\sin t.\overrightarrow{i} + \sqrt{3}\cos t.\overrightarrow{j} + \cos t \sin t.\overrightarrow{k}.$$

Vì mặt cầu hướng vào trong nên chiều trên L là thuận chiều kim đồng hồ. Do đó

$$\Phi = -\int_0^{2\pi} (-\sqrt{3}\sin^2 t + \sqrt{3}\cos^2 t)dt = -\sqrt{3}\int_0^{2\pi} \cos 2t dt = 0.$$

• *Ý nghĩa của vectơ rôta.*

Giả sử $\overrightarrow{v}$ là trường vận tốc của một dòng chất lỏng, M_o là một điểm trong chất lỏng, S_a là một đĩa tròn tâm M_o bán kính a khá nhỏ. Vì $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{v}$ liên tục, nên

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{v}(M) \approx \overrightarrow{rot}\overrightarrow{v}(M_o)\ \forall M \in S_a.$$

Gọi L_a là biên của S_a, công thức Stokes cho ta

$$\int_{L_a} \vec{v}\,.\,d\vec{r} = \iint_{S_a} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\,.\,\vec{n}dS \approx \iint_{S_a} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(M_o)\,.\,\vec{n}dS =$$

$$= \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(M_o)\,.\,\vec{n}(M_o)\,.\,\pi a^2.$$

Độ chính xác càng lớn nếu a càng bé. Do đó

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(M_o)\,.\,\vec{n}(M_o) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{L_a} \vec{v}\,.\,d\vec{r}.$$

Do đó $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(M_o)\,.\,\vec{n}(M_o)$ biểu thị tác động quay của chất lỏng xung quanh trục $\vec{n}$. Tác động ấy cực đại khi $\vec{n}$ đồng phương với $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$. Theo ý nghĩa ấy điểm M được gọi là điểm xoáy nếu $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(M) \neq 0$, *điểm không xoáy* nếu $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(M) = 0$.

4.4.5. Điều kiện để tích phân đường trong không gian không phụ thuộc đường lấy tích phân

Ở mục 4.2.4 công thức Green đã được sử dụng để tìm điều kiện cần và đủ để tích phân đường trong mặt phẳng $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc đường nối A, B. Tương tự như vậy có thể dùng công thức Stokes để tìm điều kiện cần và đủ để tích phân đường trong không gian $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc đường lấy tích phân.

Giả sử rằng miền đơn liên $D \subset \mathbf{R}^3$ có tính chất sau : mọi đường kín L trơn từng khúc trong D đều là biên của một mặt trơn từng mảnh nằm hoàn toàn trong D. P, Q, R là ba hàm số có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong D. Người ta chứng minh được rằng *điều kiện cần và đủ để tích phân đường trong không gian* $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ *không phụ thuộc đường nối A, B nằm hoàn toàn trong D là:*

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{4.20}$$

Điều kiện (4.20) cũng là điều kiện cần và đủ để $Pdx + Qdy + Rdz$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x, y, z)$ nào đó.

Hàm số $u(x, y, z)$ ấy được cho bởi công thức

$$u(M) = u(x,y,z) = \int_{\overset{\frown}{M_0M}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz + C \tag{4.21}$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm nào đó trong D, C là hằng số tùy ý.

Nếu miền D là toàn bộ $\mathbf{R}^3$, có thể tính $u(x, y, z)$ bởi công thức

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz + C. \tag{4.21'}$$

4.4.6. Trường thế

Cho trường vectơ $\vec{F} = \vec{F}(M)$ có các thành phần là P(M), Q(M), R(M). P, Q, R cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong một miền D nào đó. Nếu trong miền D tồn tại một hàm số $u = u(M)$ sao cho

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,u = \vec{F} \tag{4.22}$$

thì trường $\vec{F}$ được gọi là *trường thế* xác định trong D, u(M) được gọi là *hàm số thế vị* của trường $\vec{F}$. Nếu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên ba trục, đẳng thức (4.22) được viết là

$$\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

hay

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R,$$

do đó Pdx + Qdy + Rdz là vi phân toàn phần của u, điều này xẩy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

tức là $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F} = 0.$$

Vậy : *điều kiện cần và đủ để trường vectơ $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(M)$ là một trường thế là* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F}(M) = 0\ \forall M$.

Ví dụ. Trường vectơ $\overrightarrow{F}(x, y, z) = y^2\vec{i} + (2xy + e^{3z})\vec{j} + 3ye^{3z}\vec{k}$ là một trường thế, vì

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & 2xy + e^{3z} & 3ye^{3z} \end{vmatrix}$$

$$= (3e^{3z} - 3e^{3z})\vec{i} + 0\vec{j} + (2y - 2y)\vec{k} = 0.$$

Hàm thế vị u của trường là hàm thỏa mãn

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + e^{3z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3ye^{3z}$$

Áp dụng công thức (4.21') với $x_o = 0$, $y_o = 0$, $z_o = 0$, ta được

$$u(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + C$$

C là hằng số tùy ý.

Chú thích. Giả sử dưới tác động của lực $\overrightarrow{F}$ một chất điểm chuyển động trên quỹ đạo L từ A tới B. Giả sử phương trình chuyển động là $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, $\vec{r}(a)$ ứng với A, $\vec{r}(b)$ ứng với B. Theo định luật Newton thứ hai, ta có

$$\overrightarrow{F}(\vec{r}(t)) = m\vec{r}\,''(t),$$

m là khối lượng của chất điểm. Vậy công sinh bởi lực $\overrightarrow{F}$ là

$$W = \int_L \overrightarrow{F}.d\vec{r} = \int_a^b \overrightarrow{F}(\vec{r}(t)) . \vec{r}\,'(t)dt =$$

$$= \int_a^b m\vec{r}\,''(t) . \vec{r}\,'(t)dt = \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}|\vec{r}\,'(t)|^2 dt =$$

$$= \frac{m}{2}\left(|\vec{r}'(b)|^2 - |\vec{r}'(a)|^2\right) = \frac{1}{2}m|\vec{v}(b)|^2 - \frac{1}{2}m\,|\vec{v}(a)|^2,$$

$\vec{v} = \vec{r}'$ là vận tốc. Đại lượng $\frac{1}{2}m|\vec{v}(t)|^2$ được gọi là động năng của chất điểm ở thời điểm t. Vậy

$$W = K(B) - K(A),$$

trong đó K(M) là động năng của chất điểm ở M.

Nếu trường $\vec{F}$ là trường thế, thì tồn tại hàm số f(x, y, z) sao cho $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} f$. Hàm số P(x, y, z) = − f(x, y, z) được gọi là thế năng của chất điểm tại (x, y, z). Vậy

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}P.$$

Do đó

$$W = \int_L \vec{F}.\,\vec{dr} = -\int_L \overrightarrow{\text{grad}}P\,.\,\vec{dr} =$$

$$= -\int_a^b \left[\frac{\partial P}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial P}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial P}{\partial z}z'(t)\right]dt =$$

$$= -\int_a^b \frac{d}{dt}P(x(t), y(t), z(t))dt = -[P(\vec{r}(b)) - P(\vec{r}(a))] =$$

$$= P(A) - P(B).$$

So sánh hai kết quả tính W, ta được

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B).$$

Tổng của động năng và thế năng được bảo toàn.

Vì lẽ đó trường thế còn được gọi là *trường bảo toàn*.

4.4.7. Công thức Ostrogradsky

• Giả sử V là một miền giới nội đóng trong $\mathbf{R}^3$ có biên là một mặt kín, trơn từng mảnh S. Giả sử P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) là ba hàm số liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong V. Ta sẽ chứng minh rằng

$$(4.23)\quad \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

tích phân mặt lấy theo phía ngoài của mặt S.

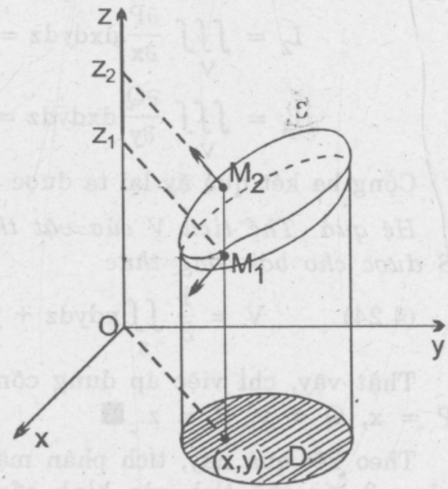
Công thức (4.23) được gọi là công thức Ostrogradsky.

Thật vậy giả sử mỗi đường thẳng song song với các trục tọa độ cắt mặt S ở không quá hai điểm (hình 4.21).

Xét tích phân bội ba

$$I_1 = \iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz =$$

$$= \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz$$



Hình 4.21

trong đó D là hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy, $z = z_2(x, y)$ và $z = z_1(x, y)$ là phương trình của phần trên S_2 và phần dưới S_1 của S, vậy

$$I_1 = \iint\limits_D R(x, y, z)\Big|_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} dxdy$$

$$= \iint\limits_D R(x, y, z_2(x, y))dxdy - \iint\limits_D R(x, y, z_1(x, y))dxdy.$$

Nhưng theo công thức tính tích phân mặt loại hai, ta có

$$\iint\limits_{S_2} R(x, y, z)dxdy = \iint\limits_D R(x, y, z_2(x, y))dxdy,$$

$$\iint\limits_{S_1} R(x, y, z)dxdy = -\iint\limits_D R(x, y, z_1(x, y))dxdy$$

vì pháp tuyến của S_2 làm với Oz một góc nhọn, còn pháp tuyến của S_1 làm với Oz một góc tù. Do đó

$$I_1 = \iint\limits_{S_1} Rdxdy + \iint\limits_{S_2} Rdxdy = \iint\limits_{S} Rdxdy$$

Tương tự, ta có

$$I_2 = \iiint\limits_{V} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{S} Pdydz$$

$$I_3 = \iiint\limits_{V} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{S} Qdzdx$$

Cộng ba kết quả ấy lại ta được công thức Ostrogradsky (4.23).

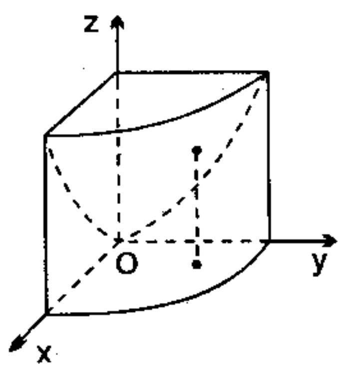
Hệ quả. Thể tích V của vật thể giới hạn bởi mặt cong kín S được cho bởi công thức

(4.24) $$V = \frac{1}{3} \iint\limits_{S} xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

Thật vậy, chỉ việc áp dụng công thức (4.23) vào các hàm số $P = x$, $Q = y$, $R = z$. ■

Theo kết quả này, tích phân mặt cho trong ví dụ 1, mục 4.4.2 bằng 3 lần thể tích của hình cầu bán kính R, tức là $4\pi R^3$.

Ví dụ : Tính $I = \iint\limits_{S} y^2zdxdy + xzdydz + x^2ydzdx$, S là phía ngoài của biên của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 1$ và các mặt phẳng tọa độ (hình 4.22).



Hình 4.22

Áp dụng công thức (4.23) với $P = xz$, $Q = x^2y$, $R = y^2z$, do đó $P'_x = z$, $Q'_y = x^2$, $R'_z = y^2$, ta được

$$I = \iiint\limits_{V} (z + x^2 + y^2)dxdydz,$$

V là vật thể giới hạn bởi mặt S. Nó được xác định bởi $(x, y) \in D$, $0 \leq z \leq x^2 + y^2$, D là một phần tư hình tròn tâm O bán kính 1 trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy. Chuyển sang tọa độ trụ, ta được

$$I = \iiint\limits_{V'} (z + r^2) r dr d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 r dr \int\limits_0^{r^2} (z + r^2) dz =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int\limits_0^1 r \left(\frac{z^2}{2} + r^2 z \right) \Big|_{z=0}^{z=r^2} dr = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^1 \frac{3}{2} r^5 dr = \frac{\pi}{8}.$$

4.4.8. Đive của một vectơ

● Nếu vectơ $\vec{F}(M)$ có các tọa độ P(M), Q(M), R(M) là những hàm số có các đạo hàm riêng cấp một thì tổng $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ được gọi là đive của $\vec{F}$, kí hiệu là div $\vec{F}$. Đó là một đại lượng vô hướng.

Dễ dàng thấy rằng : nếu $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, *các hàm số* P, Q, R *có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục thì*

(4.25) $\operatorname{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F}) = 0$.

Thật vậy

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0.$$

● Công thức Ostrogradsky có thể phát biểu như sau : *Thông lượng của trường vectơ* $\vec{F}(M)$ *qua một mặt kín hướng ra ngoài bằng tích phân bội ba của* div $\vec{F}$ *trong miền* V *giới hạn bởi mặt* S.

Ví dụ. Tính thông lượng ϕ của $\vec{F} = xy\vec{i} + (y^2 + e^{xz^2})\vec{j} + \sin(xy)\vec{k}$ qua biên S hướng ra ngoài của vật thể V giới hạn bởi mặt trụ $z = 1 - x^2$ và các mặt phẳng $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 2$ (hình 4.23).

Tính trực tiếp ϕ bằng tích phân mặt $\iint\limits_S \vec{F}.\vec{n}dS$ rất phức tạp. Áp dụng công thức Ostrogradsky, ta được

$$\Phi = \iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{F}dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_V 3ydxdydz =$$

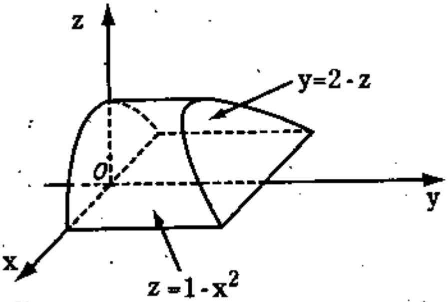
$$= 3\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1-x^2} dz \int_{0}^{2-z} ydy$$

$$= 3\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2} dz$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} \left[-\frac{(2-z)^3}{3}\right]_0^{1-x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} [(x^2+1)^3 - 8]\, dx =$$

$$= -\int_{0}^{1} (x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7)dx = \frac{184}{35}.$$



Hình 4.23

● *Ý nghĩa của* $\mathrm{div}\,\vec{F}$

Giả sử $\vec{v}$ là vận tốc của chất lỏng có mật độ S, các thành phần của vectơ $\vec{F} = \rho\vec{v}$ có các đạo hàm riêng liên tục. M_o là một điểm của chất lỏng, B_a là hình cầu tâm M_o bán kính a khá nhỏ, S_a là biên của hình cầu đó. Vì $\mathrm{div}\,\vec{F}$ liên tục nên có thể xem

$$\mathrm{div}\vec{F}(M) \approx \mathrm{div}\vec{F}(M_o)\ ,\ \forall M \in B_a.$$

Do đó

$$\iint\limits_{S_a} \vec{F}.\vec{n}dS = \iiint\limits_{B_a} \mathrm{div}\vec{F}dxdydz \approx \iiint\limits_{B_a} \mathrm{div}\vec{F}(M_o)dxdydz =$$

$$= \mathrm{div}\vec{F}(M_o)\,.\,V(B_a),$$

$V(B_a)$ là thể tích hình cầu B_a. Do đó

$$\mathrm{div}\vec{F}(M_o) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{V(B_a)} \iint\limits_{S_a} \vec{F}.\vec{n}dS$$

Vậy nếu $\operatorname{div}\vec{F}(M) > 0$, thông lượng ra ngoài những mặt cầu khá bé tâm M là dương, ta nói M là *điểm nguồn*. Nếu $\operatorname{div}\vec{F}(M) < 0$, ta nói M là *điểm rò*. Nếu $\operatorname{div}\vec{F}(M) = 0\ \forall M$ thì thông lượng qua mọi mặt kín đều bằng không. Khi ấy ta nói rằng trường vectơ $\vec{F}(M)$ *có thông lượng bảo toàn*.

4.4.9. Toán tử Hamilton

Người ta gọi toán tử Hamilton (hay nabla), kí hiệu là $\vec{\nabla}$, là vectơ tượng trưng có các thành phần là $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Áp dụng một cách hình thức các quy tắc tính toán như đối với một vectơ thực sự, ta thu được một số cách viết đơn giản.

Nếu u là một hàm số, ta có

$$\vec{\nabla}.u = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u =$$

$$= \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{dz} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u.$$

Nếu $\vec{F}$ là một vectơ có các thành phần là P, Q, R, ta có

$$\vec{\nabla}.\vec{F} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\vec{i}P + \vec{j}Q + \vec{k}R\right)$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{F},$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{F},$$

$$\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta \text{ (toán tử Laplace)}.$$

Hàm số u(x, y, z) thỏa mãn phương trình

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

được gọi là *hàm số điều hòa*.

Ta cũng có

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f) = \mathrm{div}(\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} f = \Delta f.$$

Chú thích:

Đẳng thức (4.19) có thể viết là

$$0 = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f) = \vec{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\mathrm{grad}} f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}.f.$$

Đẳng thức này tương tự như đẳng thức $\vec{v} \wedge \vec{v}.a$ trong đại số vectơ, $\vec{v}$ là một vectơ, a là một số.

Đẳng thức (4.25) có thể viết là

$$0 = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F}) = \vec{\nabla}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F} = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$$

Đẳng thức này tương tự như đẳng thức $\vec{v}.\vec{v} \wedge \vec{w} = 0$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ là những vectơ.

TÓM TẮT CHƯƠNG IV

- **Định nghĩa tích phân đường loại 1**

Cho hàm số f(M) = f(x, y) xác định trên một cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$. Chia $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ $\Delta s_1, \ldots, \Delta s_n$. Trên Δs_i lấy một điểm tùy ý M_i. Giới hạn, nếu có, của tổng $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$ khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$, d_i là đường kính của Δs_i, được gọi là tích phân đường loại 1 của f(x, y) trên cung $\overset{\frown}{AB}$, kí hiệu

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)ds.$$

• Cách tính tích phân đường loại 1

– Nếu $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$ thì

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx.$$

– Nếu $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ thì

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

• Định nghĩa tích phân đường loại 2

Cho hai hàm số $P(x, y)$, $Q(x, y)$ xác định trên một cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$. Chia $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm $A_o = A$, A_1, A_2, ..., $A_n = B$. Gọi Δx_i, Δy_i là hình chiếu của $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ lên hai trục. M_i là một điểm lấy tùy ý trên $A_{i-1}A_i$. Giới hạn, nếu có, của tổng $\sum_{i=1}^{n}[P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i]$ khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta x_i \to 0$, $\max \Delta y_i \to 0$ được gọi là tích phân đường loại hai của các hàm số $P(x, y)$, $Q(x, y)$ trên $\overset{\frown}{AB}$, kí hiệu

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

• Cách tính tích phân đường loại hai

– Nếu $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi $y = y(x)$, a, b là hoành độ của A, B thì

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]dx.$$

– Nếu $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, t_A, t_B là giá trị của tham số ứng với A, B, thì

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t)) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt.$$

- Công thức Green

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_L Pdx + Qdy,$$

L là biên của miền D.

- Diện tích S của miền D giới hạn bởi đường kín L.

$$S = \frac{1}{2}\int_L xdy - ydx.$$

- Điều kiện ắt có và đủ để tích phân đường $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc đường lấy tích phân trong một miền D nào đó là

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y) \in D.$$

Khi điều kiện ấy được thỏa mãn thì Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của một hàm số u(x, y) nào đó. Nếu $D = \mathbf{R}^2$, u(x, y) được cho bởi

$$u(x, y) = \int_{x_o}^{x} P(x, y_o)dx + \int_{y_o}^{y} Q(x, y)dy + C$$

hay

$$u(x, y) = \int_{y_o}^{y} Q(x_o, y)dy + \int_{x_o}^{x} P(x, y)dx + C,$$

(x_o, y_o) là một điểm cố định chọn trong D, C là hằng số tùy ý.

- Định nghĩa tích phân mặt loại 1

Cho hàm số f(M) = f(x, y, z) xác định trên một mặt S. Chia S thành n mảnh $\Delta S_1, \ldots, \Delta S_n$. Trên ΔS_i lấy một điểm tùy ý M_i. Giới hạn, nếu có, của tổng $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$ khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$, d_i là đường kính của ΔS_i, được gọi là tích phân mặt loại 1 của f(M) trên S, kí hiệu $\iint_S f(x, y, z)dS$.

• Cách tính tích phân mặt loại 1

Nếu mặt S được cho bởi $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$ thì

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dxdy,$$

$p = z'_x$, $q = z'_y$.

• Định nghĩa tích phân mặt loại 2

Cho hàm số $R(M) = R(x, y, z)$ xác định trên một mặt định hướng S. Chia S thành n mảnh $\Delta S_1, \ldots, \Delta S_n$. Trên ΔS_i lấy một điểm tùy ý M_i. Gọi D_i là diện tích của hình chiếu của ΔS_i lên mặt phẳng Oxy với dấu + (hay –) nếu vectơ pháp tuyến của S tại M_i làm với Oz một góc nhọn (hay tù). Giới hạn, nếu có, của tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} R(M_i)\,.\,D_i$ khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$, d_i là đường kính của ΔS_i, được gọi là tích phân mặt loại 2 của hàm số R(M) trên mặt S, kí hiệu $\iint\limits_S R(x, y, z)dxdy$.

• Cách tính tích phân mặt loại 2

Giả sử mặt S được cho bởi $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$. Khi đó

$$\iint_S R(x, y, z)dxdy = \iint_D R(x, y, z(x, y))dxdy$$

nếu vectơ pháp tuyến của S làm với Oz một góc nhọn,

$$\iint_S R(x, y, z)dxdy = -\iint_D R(x, y, z(x, y))dxdy$$

nếu vectơ pháp tuyến của S làm với Oz một góc tù.

• Công thức Stokes

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= \int_L Pdx + Qdy + Rdz,$$

L là biên của mặt S.

- Công thức Ostrogradsky

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

S là biên của V.

BÀI TẬP

1. Tính các tích phân đường :

1) $\int\limits_{AB} (x - y)ds$, AB là đoạn thẳng nối hai điểm A(0,0), B(4,3).

2) $\int\limits_L xyds$, L là biên của hình chữ nhật ABCD, A(0,0), B(4,0), C(4,2), D(0,2).

3) $\int\limits_L \sqrt{2y}\,ds$, L được xác định bởi $x = t$, $y = \frac{t^2}{2}$, $z = \frac{t^3}{3}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

2. Tính khối lượng của đường $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $0 \leqslant x \leqslant a$ biết khối lượng riêng $\rho(x, y) = \frac{1}{y}$ $(a > 0)$.

3. Xác định trọng tâm của các đường đồng chất :

1) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

2) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

4. Tính các tích phân đường :

1) $\int\limits_{ABC} (x - y)^2dx + (x + y)^2dy$, ABC là đường gấp khúc, A(0,0), B(2,2), C(4,0).

2) $\int\limits_L ydx - (y + x^2)dy$, L là cung parabôn $y = 2x - x^2$ nằm ở trên trục Ox theo chiều kim đồng hồ.

5. Tính $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (xy - 1)dx + x^2ydy$, A(1,0), B(0,2) theo đường :

1) $2x + y = 2$
2) $4x + y^2 = 4$
3) $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ theo chiều dương.

6. Tính các tích phân đường :

1) $\oint\limits_L xy\left[-\left(x + \dfrac{y}{2}\right)dx + \left(\dfrac{x}{2} + y\right)dy\right]$, L là biên của tam giác ABC, A(– 1, 0), B(1, – 2), C(1, 2).

2) $\int\limits_{ABC} 2(x^2 + y^2)dx + (4y + 3)xdy$, ABC là đường gấp khúc, A(0, 0), B(1, 1), C(0, 2)

3) $\oint\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, L là đường $x^2 + y^2 = ax$ $(a > 0)$,

4) $\oint\limits_L x^3\left(y + \dfrac{x}{4}\right)dy - y^3\left(x + \dfrac{y}{4}\right)dx$, L là đường $x^2 + y^2 = 2x$.

7. Tích phân đường $\int \left(1 - \dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)dy$ có phụ thuộc đường lấy tích phân không ? Tính tích phân ấy từ $A(1, \pi)$ đến $B(2, \pi)$ theo một cung không cắt Oy.

8. Tích phân đường $\int \dfrac{x^2 + y^2}{xy}\left(\dfrac{3x^2 - y^2}{x}dx + \dfrac{3y^2 - x^2}{y}dy\right)$ có phụ thuộc đường lấy tích phân không ? Tính tích phân ấy theo cung $\overset{\frown}{AB}$ xác định bởi $x = t + \cos^2 t$, $y = 1 + \sin^2 t$, $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

9. Chứng minh rằng các biểu thức Pdx + Qdy sau đây là vi phân toàn phần của một hàm số u(x, y) nào đó. Tìm u :

1) $(x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy$
2) $(2x - 3xy^2 + 2y)dx + (2x - 3x^2y + 2y)dy$
3) $[e^{x+y} + \cos(x - y)]dx + [e^{x+y} - \cos(x - y) + 2]dy$

4) $e^x[e^y(x - y + 2) + y]dx + e^x[e^y(x - y) + 1]dy$

5) $\dfrac{xdx}{x^2 + y^2} + \dfrac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}ydy$.

10. Tìm m để biểu thức

$$\frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{(x^2 + y^2)^m}$$

là vi phân toàn phần của một hàm số u(x, y) nào đó. Tìm u.

11. Tìm a, b để biểu thức

$$\frac{(ax^2 + 2xy + y^2)dx - (x^2 + 2xy + by^2)dy}{(x^2 + y^2)^2}$$

là vi phân toàn phần của một hàm số u(x, y) nào đó. Tìm u.

12. Tìm α, β để tích phân đường

$$\int\limits_L \frac{y(1 - x^2 + \alpha y^2)dx + x(1 - y^2 + \beta x^2)dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

không phụ thuộc đường lấy tích phân. Tính tích phân ấy từ điểm A(0, 0) đến điểm B(a, b) ứng với các giá trị α, β đã tìm được.

13. Tính $\displaystyle\oint\limits_L \frac{xdx + ydy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$, L là đường elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

14. Tính tích phân mặt $\displaystyle\iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$ nếu :

1) S là mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$
2) S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

15. Tính các tích phân mặt :

1) $\displaystyle\iint\limits_S (x + y + z)dS$, S là biên của hình lập phương $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$;

2) $\displaystyle\iint\limits_S \left(z + 2x + \frac{4y}{3}\right) dS$, S là phần của mặt phẳng $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất ;

3) $\iint\limits_S (yz + zx + xy)dS$, S là phần của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

16. Tính khối lượng của mặt $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq 1$ nếu khối lượng riêng $\rho(x, y, z) = z$.

17. Xác định trọng tâm của mặt đồng chất $z = 2 - \frac{x^2 + y^2}{2}$, $z \geq 0$.

18. Tính các tích phân mặt :

1) $\iint\limits_S xyzdxdy$, S là mặt ngoài của phần hình cầu xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

2) $\iint\limits_S xdydz + dxdz + xz^2dxdy$, S là mặt ngoài của phần hình cầu xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$

3) $\iint\limits_S zdxdy$, S là mặt ngoài của $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

4) $\iint\limits_S \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}$, S là mặt ngoài của

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

5) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, S là mặt ngoài của

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2, \ R > 0.$$

19. Tính $\oint\limits_L (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$, L là giao tuyến của các mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 2ay$, $x^2 + y^2 = 2by$, $z > 0$, $a > b > 0$, hướng đi trên L là ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía $z > 0$.

20. Tính các tích phân mặt :

1) $\iint\limits_S xzdydz + yxdzdx + zydxdy$, S là phía ngoài của biên của hình chóp $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1$

2) $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

3) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, S là phía ngoài của biên của hình lập phương $0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a,\ 0 \leq z \leq a$.

21. Chứng minh các công thức

$\mathrm{div}(g\vec{F}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}g.\vec{F} + g\mathrm{div}\vec{F}$; $\mathrm{div}(\vec{G} \wedge \vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{G} - \vec{G}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F}$;

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(g\vec{F}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}g \wedge \vec{F} + g.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F}$.

22. Chứng minh rằng các trường vectơ sau đây là những trường thế. Tìm hàm số thế vị của trường :

1) $\vec{F}(x, y) = e^{-x}\left[\dfrac{1}{x+y} - \ln(x + y)\right]\vec{i} + \dfrac{e^{-x}}{x+y}\vec{j}$

2) $\vec{F}(x,y,z) = yz(2x + y + z)\vec{i} + zx(2y + z + x)\vec{j} + xy(2z + x + y)\vec{k}$

3) $\vec{F}(x, y, z) = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$.

23. Tính thông lượng của các trường vectơ sau :

1) $\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ qua phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ hướng ra ngoài.

2) $\vec{F}(x, y, z) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ qua mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = x$ hướng ra ngoài.

3) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qua mặt $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$ hướng lên trên.

4) $\vec{F}(x, y, z) = \dfrac{1}{x}\vec{i} + \dfrac{1}{y}\vec{j} + \dfrac{1}{z}\vec{k}$ qua mặt $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ hướng ra ngoài.

24. Đặt $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Tìm hàm số f(r) khả vi sao cho $f(1) = 1$ và $\mathrm{div}(f(r).\overrightarrow{OM}) = 0$ tại mọi điểm M(x, y, z).

25. Cho vectơ $\overrightarrow{F}(x, y, z) = xf(r)\overrightarrow{i} + yf(r)\overrightarrow{j} + 2zf(r)\overrightarrow{k}$, trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tìm f để tồn tại một vectơ $\overrightarrow{G}$ sao cho $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{G}$, biết rằng $f(1) = 1$. Tìm một biểu thức của các thành phần của $\overrightarrow{G}$ biết rằng thành phần thứ ba của nó bằng không.

26. Tính lưu số của trường $\overrightarrow{F} = (y + z)\overrightarrow{i} + (z + x)\overrightarrow{j} + (x + y)\overrightarrow{k}$ dọc theo cung tròn nhỏ nhất của đường tròn lớn của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ nối các điểm M(3, 4, 0) và N(0, 0, 5).

27. Tính $\int\limits_L 2xy^2z\,dx + 2x^2yz\,dy + (x^2y^2 - 2z)\,dz$, L là đường $x = \cos t,\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin t,\ z = \dfrac{1}{2}\sin t$ hướng theo chiều tăng của t.

28. Đặt $OM = r \neq 0$. Tìm hàm số f(r) thỏa mãn điều kiện $f(1) = 1$ sao cho trường vectơ $f(r).\overrightarrow{OM}$ có thông lượng bảo toàn. Tính thông lượng của trường vectơ ấy qua mặt cầu S tâm O bán kính R hướng ra ngoài. Có thể áp dụng công thức Ostrogradsky để tính được không ?

ĐÁP SỐ

1. 1) $\dfrac{5}{2}$; 2) 24 ; 3) $\dfrac{1}{8}\left(3\sqrt{3} - 1 + \dfrac{3}{2}\ln\dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$.

2. 1.

3. 1) $\left(\dfrac{4a}{3}, \dfrac{4a}{3}\right)$; 2) $\left(0, \dfrac{2a}{\pi}, \dfrac{b\pi}{2}\right)$.

4. 1) $-\dfrac{32}{3}$; 2) 4.

5. 1) 1 ; 2) $\dfrac{17}{15}$; 3) $\dfrac{4}{3}$.

6. 1) 4 ; 2) 3 ; 3) $-\dfrac{\pi a^3}{8}$; 4) $\dfrac{5\pi}{2}$.

7. Không nếu đường tích phân không cắt Oy ; $1 + \pi$.

8. Không nếu đường tích phân không cắt các trục tọa độ ; $\dfrac{(\pi^2 + 16)^2}{16\pi} - 4$.

9. 1) $\dfrac{1}{3}x^3 - x^2y^2 + 3x + \dfrac{1}{3}y^3 + 3y + C$;2) $x^2 + y^2 - \dfrac{3}{2}x^2y^2 + 2xy + C$;

3) $e^{x+y} + \sin(x - y) + 2y + C$;4) $e^x[y + e^y(x - y + 1)] + C$;

5) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \dfrac{y^2}{2} + C$.

10. $m = 1$, $u = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + C$.

11. $a = b = -1$, $u = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2} + C$.

12. $\alpha = \beta = 1$, $I = \dfrac{ab}{1 + a^2 + b^2}$.

13. 0. Biểu thức dưới dấu tích phân là $\dfrac{1}{2}\dfrac{d(x^2 + y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$

14. 1) $\pi\sqrt{2}$; 2) $\dfrac{8}{3}\pi a^4$.

15. 1) 9 ; 2) $4\sqrt{61}$; 3) $\dfrac{64}{15}a^4\sqrt{2}$.

16. $\dfrac{2\pi(1 + 6\sqrt{3})}{15}$.

17. $\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{310}(307 - 15\sqrt{5})\right)$.

18. 1) $\dfrac{2}{15}$; 2) $\dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{2}{15}$; 3) $-\dfrac{12\pi R^2}{5}$;

4) $\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$; 5) $\frac{8}{3}\pi R^3(a + b + c)$.

19. $-2\pi ab^2$.

20. 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{12\pi R^5}{5}$; 3) $3a^4$.

22. 1) $e^{-x}\ln(x + y) + C$; 2) $xyz(x + y + z) + C$;
3) $xy + yz + zx + C$.

23. 1) $\frac{3\pi R^4}{16}$; 2) $\frac{\pi}{5}$; 3) 2π ; 4) $4\pi\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right)$.

24. $\frac{1}{r^3}$ (dùng công thức thứ nhất bài 21).

25. $\frac{1}{r^4}$; $\vec{G} = \frac{yz}{(x^2 + y^2)^2}\vec{i} - \frac{xz}{(x^2 + y^2)^2}\vec{j}$.

26. -12.

27. 0 (vectơ $(2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2 - 2z)$ là gradiên của $x^2y^2z - z^2$, còn L là đường tròn giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ với mặt phẳng $y = \sqrt{3}z$).

28. $f(r) = \frac{1}{r^3}$; $\Phi = 4\pi$. Không áp dụng công thức Ostrogradsky được vì trường vectơ không xác định tại gốc O.

Chương V

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Người ta gọi *phương trình vi phân* là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

trong đó x là biến số độc lập, $y = y(x)$ là hàm số phải tìm, y', y'', ..., $y^{(n)}$ là các đạo hàm của nó.

Cấp cao nhất của đạo hàm của y có mặt trong phương trình được gọi là *cấp* của phương trình. Chẳng hạn, $y' + xy^2 - 2y = e^x$ là phương trình vi phân cấp một ; $y'' + 4y = 0$ là phương trình vi phân cấp hai.

Phương trình vi phân được gọi là *tuyến tính* nếu F là bậc nhất đối với $y, y', ..., y^{(n)}$. Dạng tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp n là

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) ;$$

trong đó $a_1(x), ..., a_n(x), b(x)$ là những hàm số cho trước.

Người ta gọi *nghiệm* của phương trình vi phân là mọi hàm số thỏa mãn phương trình ấy, tức là mọi hàm số sao cho khi thế nó vào phương trình ta được một đồng nhất thức. Chẳng hạn, các hàm số $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$, trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý, đều là nghiệm của phương trình $y'' + 4y = 0$. Cho C_1, C_2 những giá trị khác nhau, ta được những nghiệm khác nhau của phương trình ấy, vậy phương trình ấy có vô số nghiệm.

Xét phương trình

$$y' = \cos x.$$

Bằng cách lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$y = \sin x + C$$

trong đó C là hằng số tùy ý. Nếu đặt điều kiện y có giá trị bằng 2 khi $x = \frac{\pi}{2}$, thì bằng cách thế điều kiện ấy vào y ta được $2 = 1 + C \Rightarrow C = 1$. Vậy $y = \sin x + 1$ là nghiệm của phương trình thỏa mãn điều kiện đã cho.

Giải một phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó. Về mặt hình học mỗi nghiệm của phương trình vi phân xác định một đường gọi là *đường tích phân* của phương trình. Giải một phương trình vi phân là tìm tất cả các đường tích phân của nó, các đường ấy được xác định hoặc bởi phương trình $y = f(x)$, hoặc bởi phương trình $\Phi(x, y) = 0$, hoặc bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Trong giáo trình này, ta chỉ xét những phương trình vi phân cấp 1 và cấp 2.

5.1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

5.1.1. Đại cương về phương trình vi phân cấp một

- Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp một là

(5.1) $$F(x, y, y') = 0.$$

Nếu giải được phương trình ấy đối với y', phương trình sẽ có dạng

(5.2) $$y' = f(x, y).$$

Ví dụ : $y' + xy = x\sin x$, $yy' + x^2 + y^2 = 0$ là những phương trình vi phân cấp một, mà phương trình đầu là tuyến tính.

- *Định lí 5.1 (sự tồn tại và duy nhất nghiệm). Cho phương trình vi phân cấp một*

(5.2) $$y' = f(x, y).$$

Giả sử f(x, y) liên tục trong một miền D nào đó của mặt phẳng Oxy và giả sử (x_o, y_o) là một điểm nào đó của D. Khi đó trong một lân cận nào đó của điểm $x = x_o$, tồn tại ít nhất một nghiệm y = y(x) của phương trình (5.2), lấy giá trị y_o khi $x = x_o$.

Nếu ngoài ra $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *cũng liên tục trong miền D thì nghiệm ấy là duy nhất.*

Ta thừa nhận định lí này.

Điều kiện y = y(x) lấy giá trị y_o khi $x = x_o$ được gọi là *điều kiện ban đầu* và thường được viết là

$$y\,|_{x = x_o} = y_o.$$

Bài toán tìm nghiệm của phương trình (5.2) thỏa mãn điều kiện ban đầu đó được gọi là *bài toán Cauchy* của phương trình (5.2).

Về mặt hình học, định lí trên khẳng định rằng với các điều kiện đã nêu, trong một lân cận nào đó của điểm (x_o, y_o) tồn tại một đường tích phân duy nhất của phương trình (5.2) đi qua điểm ấy.

• Người ta gọi *nghiệm tổng quát* của phương trình vi phân cấp một $y' = f(x, y)$ là hàm số

$$y = \varphi(x, C),$$

trong đó C là một hằng số tùy ý, thỏa mãn các điều kiện sau :

1) Nó thỏa mãn phương trình vi phân với mọi giá trị của C ;

2) Với mọi (x_o, y_o) ở đó các điều kiện của định lí trên được thỏa mãn, có thể tìm được một giá trị $C = C_o$ sao cho hàm số $y = \varphi(x, C_o)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$y\,|_{x = x_o} = y_o.$$

Về mặt hình học, nghiệm tổng quát của phương trình (5.2) được biểu diễn bởi một họ đường tích phân $y = \varphi(x, C)$ phụ thuộc một tham số.

Đôi khi ta không tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (5.2) dưới dạng tường minh $y = \varphi(x, C)$, mà tìm được một hệ thức có dạng

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

nó xác định nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn. Hệ thức ấy được gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình (5.2).

Người ta gọi *nghiệm riêng* của phương trình (5.2) là mọi hàm số $y = \varphi(x, C_o)$ mà ta được bằng cách cho C trong nghiệm tổng quát một giá trị xác định C_o. Hệ thức $\Phi(x, y, C_o) = 0$ mà ta được bằng cách cho C trong tích phân tổng quát lấy giá trị C_o được gọi là *tích phân riêng*.

Phương trình (5.2) có thể có một số nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát, những nghiệm ấy được gọi là *nghiệm kì dị*. Tại các điểm trên đường tích phân tương ứng, điều kiện duy nhất nghiệm bị vi phạm.

5.1.2. Phương trình khuyết

• *Phương trình khuyết y :* $F(x, y') = 0$

Ba trường hợp thường gặp là :

– Phương trình giải ra được đối với y' có dạng $y' = f(x)$. Chỉ việc lấy tích phân hai vế, ta được

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C,$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

– Phương trình giải ra được đối với x có dạng $x = f(y')$. Đặt $y' = t$, ta có $x = f(t)$, $dx = f'(t)dt$, $dy = tdx = tf'(t)dt$, do đó $y = \int tf'(t)dt = tf(t) - \int f(t)dt = tf(t) - F(t) + C$, trong đó $F(t)$ là một nguyên hàm của $f(t)$. Ta được phương trình tham số của đường tích phân :

$$x = f(t),\ y = tf(t) - F(t) + C$$

Ví dụ : Giải phương trình $x = y'^2 + y' + 1$.

Đặt $y' = t$, suy ra $x = t^2 + t + 1$, $dx = (2t + 1)dt$, $dy = y'dx = t(2t + 1)dt = (2t^2 + t)dt$, $y = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C$.

Phương trình tham số của đường tích phân là

$$x = t^2 + t + 1,\ y = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C.$$

– Phương trình có thể tham số hóa : $x = f(t)$, $y' = g(t)$. Ta có $dy = y'dx = g(t)f'(t)dt$, do đó $y = \int g(t)f'(t)dt = h(t) + C$, trong đó $h(t)$ là một nguyên hàm của $g(t)f'(t)$. Ta được phương trình tham số của đường tích phân.

• *Phương trình khuyết x :* $F(y, y') = 0$.

Ba trường hợp thường gặp là :

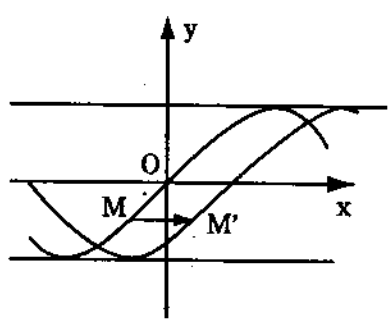
– Phương trình dạng $y' = f(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow dx = \frac{dy}{f(y)}$. Lấy tích phân hai vế ta được $x = F(y) + C$, $F(y)$ là một nguyên hàm của $\frac{1}{f(y)}$.

– Phương trình dạng $y = f(y')$. Đặt $y' = t$, suy ra $y = f(t)$, $dy = f'(t)dt$. Mặt khác $dy = tdx$, vậy $dx = \frac{f'(t)}{t}dt$, $x = \int \frac{f'(t)}{t}dt = F(t) + C$, $F(t)$ là một nguyên hàm của $\frac{f'(t)}{t}$, ta được phương trình tham số của đường tích phân.

– Phương trình tham số hóa của $F(y, y') = 0$ dưới dạng $y = f(t)$, $y' = g(t)$. Ta có $dy = f'(t)dt = g(t)dx$, suy ra $dx = \frac{f'(t)}{g(t)}dt$. Vậy $x = \int \frac{f'(t)}{g(t)}dt = G(t) + C$.

Ví dụ : Giải phương trình $y^2 + y'^2 = 1$.

Tham số hóa nó bằng cách đặt $y = \sin t$, $y' = \cos t$. Nhớ rằng $y' = \frac{dy}{dx}$, ta được $dy = \cos t dt = \cos t dx$. Có 2 trường hợp :



Hình 5.1

Nếu $\cos t \neq 0$ thì $dt = dx$, $t = x + C$, $y = \sin(x + C)$, đó là nghiệm tổng quát.

Nếu $\cos t = 0$ ta có $t = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, vậy $y = \pm 1$. Hai nghiệm này không nằm trong họ nghiệm tổng quát, đó là hai nghiệm kì dị. Đường tích phân tương ứng là hình bao của họ đường tích phân tổng quát (hình 5.1).

5.1.3. Phương trình với biến số phân li

Đó là phương trình có dạng

$$f(x)dx = g(y)dy \tag{5.3}$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy$$

hay

$$F(x) = G(y) + C,$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, $G(y)$ là một nguyên hàm của $g(y)$.

Ví dụ : Giải phương trình $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0$.

Nếu $x \neq 0$, $y \neq 0$, có thể viết phương trình thành

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right) dx = \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln|x| + x = y - \ln|y| + C$$

hay

$$\ln|xy| + x - y = C$$

Đó là tích phân tổng quát của phương trình. Dễ thấy rằng $x = 0$, $y = 0$ cũng thỏa mãn phương trình, chúng biểu diễn hai đường tích phân kì dị.

Chú thích. Những phương trình khuyết dạng $y' = f(x)$ và $y' = f(y)$ cũng là những phương trình với biến số phân li.

5.14. Phương trình thuần nhất

Đó là phương trình vi phân có dạng

$$(5.4) \qquad y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Rõ ràng phương trình ấy không đổi khi ta thay (x, y) bởi (kx, ky) với k là hằng số, tức là nó bất biến qua phép vị tự tâm O với tỉ số vị tự bất kì.

Đặt y = u.x, trong đó u là một hàm số của x, suy ra

$$y' = u + xu' = f(u) \text{ hay } x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

Do đó, nếu $f(u) - u \neq 0$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u},$$

đó là một phương trình với biến số phân li.

Bằng cách tích phân hai vế, ta được

$$\ln|x| = \int \frac{du}{f(u) - u} = \Phi(u) + \ln|C|,$$

trong đó $\Phi(u)$ là một nguyên hàm của $\frac{1}{f(u) - u}$. Do đó $x = Ce^{\Phi(u)}$, vậy nghiệm tổng quát của phương trình (5.4) là

$$x = Ce^{\Phi(y/x)}.$$

Cũng có thể viết phương trình tham số của đường tích phân tổng quát là $x = Ce^{\Phi(u)}$, $y = Cue^{\Phi(u)}$, đó là một họ đường vị tự.

Nếu $f(u) \equiv u$ thì phương trình (5.4) có dạng

$$y' = \frac{y}{x},$$

nghiệm tổng quát của nó là $y = Cx$.

Còn nếu $f(u) = u$ tại $u = u_o$ thì có thể thử dễ dàng rằng hàm số $y = u_o x$ cũng là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 1 : Giải phương trình $y' = \frac{x + ay}{ax - y}$, a là hằng số.

Đó là phương trình thuần nhất vì vế phải có thể được viết là $\frac{1 + a\left(\frac{y}{x}\right)}{a - \left(\frac{y}{x}\right)}$. Đặt $y = u.x$, suy ra

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1 + au}{a - u} \text{ hay } \frac{dx}{x} = \frac{a - u}{1 + u^2}du.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln|x| = a.\text{arctg}u - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) + \ln|C|$$

hay

$$x\sqrt{1 + u^2} = Ce^{a.\text{arctg}u}$$

do đó

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{a.\text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Nếu đổi sang tọa độ cực, đường tích phân tổng quát có dạng $r = Ce^{a\varphi}$, đó là họ các đường xoắn ốc lôgarit.

Ví dụ 2 : Giải phương trình $x^2y'^2 - (x^2 + y^2) = 0$.

Đó là phương trình thuần nhất vì có thể viết nó dưới dạng

$$y'^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1.$$

Có thể tham số hóa phương trình ấy bằng cách đặt

$$y' = \text{ch}t, \frac{y}{x} = \text{sh}t.$$

Suy ra $dy = \text{ch}t\,dx$. Mặt khác $y = x\,\text{sh}t$, vậy $dy = \text{sh}t\,dx + x\,\text{ch}t\,dt$. Do đó

$$(\text{ch}t - \text{sh}t)dx = x\,\text{ch}t\,dt.$$

Nhưng $\text{ch}t - \text{sh}t = e^{-t} \neq 0\ \forall t$. Vậy

$$\frac{dx}{x} = e^t \mathrm{ch}t dt = \frac{e^{2t}+1}{2}dt.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln|x| = \frac{e^{2t}+2t}{4} + \ln|C|$$

Đặt $g(t) = \dfrac{e^{2t}+2t}{4}$, ta được

$$x = Ce^{g(t)},\ y = C\mathrm{sh}te^{g(t)},$$

đó là phương trình tham số của họ đường tích phân tổng quát, một họ đường vị tự.

Chú thích. Phương trình dạng

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

trong đó P(x, y) và Q(x, y) là hai hàm số thuần nhất cùng bậc, cũng là phương trình thuần nhất, vì tỉ số $\dfrac{P}{Q}$ có thể biểu diễn dưới dạng $f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Chẳng hạn, các phương trình

$$(2xy - 5y^2)dx + (3y^2 - xy)dy = 0$$

$$y(x^2 - 2y^2)dx - (x^3 + 4x^2y)dy = 0$$

là những phương trình vi phân cấp một thuần nhất.

5.1.5. Phương trình tuyến tính

Đó là phương trình có dạng

(5.5) $$y' + p(x)y = q(x),$$

trong đó p(x), q(x) là những hàm số liên tục. Phương trình tuyến tính được gọi là *thuần nhất* nếu $q(x) \equiv 0$, là *không thuần nhất* nếu $q(x) \not\equiv 0$.

Để giải phương trình (5.5), trước hết ta giải phương trình thuần nhất tương ứng

(5.6) $$y' + p(x)y = 0.$$

Nếu $y \neq 0$, có thể viết nó thành

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

đó là một phương trình với biến số phân li. Suy ra

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|,$$

C là hằng số tùy ý, do đó

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{5.7}$$

đó là nghiệm tổng quát của phương trình (5.6). Chú ý rằng $y = 0$ cũng là một nghiệm của (5.6) và là một nghiệm riêng ứng với $C = 0$.

Bây giờ xem C là một hàm số, ta tìm C để cho (5.7) thỏa mãn phương trình không thuần nhất (5.5). Lấy đạo hàm hai vế của (5.7), rồi thế vào (5.5), ta được

$$e^{-\int p(x)dx}C'(x) - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

hay

$$\frac{dC}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Do đó

$$C = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K$$

trong đó K là một hằng số tùy ý. Vậy

$$y = Ke^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}.\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \tag{5.8}$$

là nghiệm tổng quát của phương trình (5.5).

Phương pháp giải trên gọi là phương pháp *biến thiên hằng số*.

Ta nhận xét rằng số hạng thứ hai trong vế phải của (5.8) là một nghiệm riêng của phương trình (5.5) ứng với $K = 0$, còn số hạng thứ nhất là nghiệm tổng quát của phương trình (5.6). Có thể chứng minh một cách tổng quát rằng : nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất bằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng cộng với một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất.

Ví dụ 1 : Tìm nghiệm của phương trình

$$(x^2 + 1)y' + xy = 1$$

thỏa mãn điều kiện $y|_{x=0} = 2$

Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$(x^2 + 1)y' + xy = 0 \text{ hay } \frac{dy}{y} = -\frac{x}{x^2+1}$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \ln|C|,$$

$$y = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}},$$

đó là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất. Bây giờ xem C là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta có

$$\sqrt{x^2+1}\,C' = 1 \Rightarrow C' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + K,$$

K là hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + K}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Từ điều kiện ban đầu $y|_{x=0} = 2$, ta được $K = 2$. Vậy nghiệm phải tìm là

$$y = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + 2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ví dụ 2 : Giải phương trình $(x^2 + 1)y' + xy = -x$.

Dễ dàng nhận thấy rằng $y = -1$ là một nghiệm riêng của phương trình đã cho, vì nếu $y = -1$ thì $y' = 0$. Vậy chỉ cần tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng, đó là $y = \dfrac{C}{\sqrt{x^2+1}}$ (xem ví dụ 1). Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}} - 1.$$

Ví dụ 3 : Giải phương trình $e^y dx + (xe^y - 1)dy = 0$

Nếu xem y là hàm số phải tìm của biến số x và viết phương trình dưới dạng

$$(xe^y - 1)y' + e^y = 0$$

thì phương trình ấy không thuộc những dạng đã xét. Nếu xem x là hàm số phải tìm của y, ta được phương trình

$$x' + x = \frac{1}{e^y},$$

trong đó $x' = \frac{dx}{dy}$. Đó là một phương trình tuyến tính cấp một đối với hàm số x(y).

Giải phương trình thuần nhất tương ứng ta được

$$\frac{dx}{dy} + x = 0, \text{ hay } \frac{dx}{x} = -dy, \text{ do đó } x = Ce^{-y}.$$

Cho hằng số C biến thiên để tìm nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất, ta được

$$C'e^{-y} = e^{-y}, \text{ do đó } C' = 1, \text{ vậy } C = y + K.$$

Suy ra nghiệm tổng quát là

$$x = (y + K)e^{-y} = Ke^{-y} + ye^{-y}.$$

5.1.6. Phương trình Bernoulli

Đó là phương trình có dạng

(5.9) $$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

trong đó p(x), q(x) là những hàm số liên tục, α là một số thực. Phương trình ấy trở thành phương trình tuyến tính khi $\alpha = 0$ hay $\alpha = 1$. Vì vậy, ta giả thiết $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$. Với $y \neq 0$, chia hai vế của (5.9) cho y^{α}, ta được

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$, ta có $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, phương trình trên trở thành

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$$

đó là một phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 đối với z.

Ví dụ : Giải phương trình $y' + \frac{2}{x+1}y + (x+1)^3y^2 = 0$

Nếu $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho y^2, ta được

$$y^{-2}y' + \frac{2}{x+1}y^{-1} + (x+1)^3 = 0.$$

Đặt $y^{-1} = z$, ta có $-y^{-2}y' = z'$, phương trình trở thành

$$z' - \frac{2}{x+1}z = (x+1)^3,$$

đó là một phương trình tuyến tính. Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x+1} = 0 \text{ hay } \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x+1}.$$

Do đó

$$\ln|z| = 2\ln|x+1| + \ln|C| \text{ hay } z = C(x+1)^2.$$

Cho hằng số C biến thiên, thế vào phương trình không thuần nhất ta được

$$C' = x + 1 \Rightarrow C = \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{K}{2}, \text{ K là hằng số tùy ý.}$$

Từ đó ta có

$$z = \frac{(x+1)^4 + K(x+1)^2}{2} \Rightarrow y = \frac{2}{(x+1)^4 + K(x+1)^2}.$$

Còn $y = 0$ cũng là một nghiệm của phương trình, đó là nghiệm kì dị.

5.1.7. Phương trình vi phân toàn phần

Đó là phương trình vi phân có dạng

(5.10) $\qquad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$

trong đó $P(x, y)$, $Q(x, y)$ là những hàm số liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong một miền đơn liên D thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{5.11}$$

Khi đó $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x, y)$ nào đó. Nếu $D = \mathbf{R}^2$, hàm số $u(x, y)$ được cho bởi công thức

$$u(x, y) = \int_{x_o}^{x} P(x, y_o)\, dx + \int_{y_o}^{y} Q(x, y)\, dy + K \tag{5.12}$$

hay

$$u(x, y) = \int_{y_o}^{y} Q(x_o, y)\, dy + \int_{x_o}^{x} P(x, y)\, dx + K \tag{5.13}$$

trong đó x_o, y_o là hai số nào đó, K là hằng số tùy ý (xem công thức (4.12) và (4.12')). Vậy phương trình (5.10) có thể viết là

$$du(x, y) = 0.$$

Tích phân tổng quát của nó là

$$u(x, y) = C,$$

trong đó u được tính theo các công thức (5.12) hay (5.13), C là hằng số tùy ý.

Ví dụ : Giải phương trình

$$[(1 + x + y)e^x + e^y]dx + [e^x + xe^y]dy.$$

Ta có $P(x, y) = (1 + x + y)e^x + e^y$, $Q(x, y) = e^x + xe^y$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x + e^y = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Vậy $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm số $u(x, y)$.

Tính u theo công thức (5.12) với $x_o = y_o = 0$, ta được

$$u(x, y) = \int_0^x [(1+x)e^x + 1]\,dx + \int_0^y (e^x + xe^y)\,dy + K =$$

$$= xe^x + x + e^x y + xe^y - x + K = (x+y)e^x + xe^y + K.$$

Tích phân tổng quát của phương trình là

$$(x+y)e^x + xe^y = C$$

Chú thích. Giả sử phương trình

(5.14) $\qquad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

không phải là phương trình vi phân toàn phần. Nếu ta tìm được một hàm số $\alpha(x, y)$ sao cho

(5.15) $\qquad \alpha(x, y)[P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = 0$

trở thành phương trình vi phân toàn phần, tức là sao cho

(5.16) $\qquad \dfrac{\partial}{\partial y}(\alpha P) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\alpha Q)$

thì $\alpha(x, y)$ được gọi là *thừa số tích phân* của phương trình (5.14). Nghiệm tổng quát của phương trình (5.15) trùng với nghiệm tổng quát của phương trình (5.14).

Ví dụ : Giải phương trình

$$(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$$

bằng cách tìm một thừa số tích phân α chỉ phụ thuộc y.

Điều kiện (5.16) cho ta

$$\alpha'(y)(2xy^2 - 3y^3) + \alpha(y)(4xy - 9y^2) = -3y^2\alpha(y)$$

hay

$$2y\alpha(y)(2x - 3y) + y^2\alpha'(y)(2x - 3y) = 0.$$

Với điều kiện $y \neq 0$, $2x - 3y \neq 0$, ta được

$$2\alpha + y\frac{d\alpha}{dy} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{C}{y^2}.$$

Chọn C = 1, ta được phương trình vi phân toàn phần

$$(2x - 3y)\,dx + \left(\frac{7}{y^2} - 3x\right)dy = 0\,.$$

Dùng công thức (5.12) với $x_o = 0$, $y_o = 1$, ta được

$$u(x, y) = \int_0^x (2x - 3)dx + \int_1^y \left(\frac{7}{y^2} - 3x\right)dy =$$

$$= x^2 - \frac{7}{y} - 3xy + 7\,.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$x^2 - \frac{7}{y} - 3xy = C\,,$$

C là hằng số tùy ý. Dễ kiểm tra rằng $y = 0$ cũng là một nghiệm của phương trình, nhưng $y = \frac{2}{3}x$ không là nghiệm của phương trình.

5.1.8. Phương trình Clairaut

Đó là phương trình có dạng

(5.17) $\quad y = xy' + f(y'),$

trong đó f là một hàm số khả vi.

Đặt $y' = t$, ta có $y = xt + f(t)$. Lấy đạo hàm hai vế đối với x, ta được

$$y' = t + x\frac{dt}{dx} + f'(t)\frac{dt}{dx} = t$$

hay

$$[x + f'(t)]\frac{dt}{dx} = 0\,.$$

Suy ra :

- $\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow$ t là hằng số, ta được họ đường thẳng D_t phụ thuộc tham số t có phương trình $y = tx + f(t)$.

• $x = -f'(t)$, $y = -tf'(t) + f(t)$, đó là phương trình tham số của đường tích phân kì dị E.

Dễ dàng thấy rằng đường E tiếp xúc với mọi đường tích phân D_t. Thật vậy, phương trình đường tiếp tuyến của E tại M(t) là

$$Y - y(t) = \frac{dy}{dx}(X - x(t))$$

hay

$$Y + tf'(t) - f(t) = t(X + f'(t)) \text{ hay } Y = tX + f(t),$$

đó chính là phương trình của D_t. Như vậy E chính là hình bao của họ đường thẳng D_t.

Ví dụ : Xét phương trình

$$y = xy' - \frac{1}{4}y'^2.$$

Đó là phương trình Clairaut, nghiệm tổng quát của nó là $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$, nó biểu diễn một họ đường thẳng phụ thuộc một tham số. Các đường thẳng không có điểm kì dị, vậy nếu khử C giữa các phương trình

$$\begin{cases} y = Cx - \frac{1}{4}C^2 \\ 0 = x - \frac{1}{2}C \end{cases}$$

ta được phương trình của hình bao của họ đường tích phân tổng quát là $y = x^2$. Vậy nghiệm kì dị của phương trình là $y = x^2$.

5.1.9. Phương trình Lagrange

Đó là phương trình có dạng

(5.18) $$y = xg(y') + f(y'),$$

trong đó f và g là hai hàm số khả vi.

Đặt $y' = t$, ta có $y = xg(t) + f(t)$. Lấy đạo hàm hai vế đối với x, ta được

$$y' = g(t) + xg'(t)\frac{dt}{dx} + f'(t)\frac{dt}{dx} = t.$$

Suy ra

$$[g(t) - t]\frac{dx}{dt} + g'(t)x + f'(t) = 0.$$

Đó là một phương trình tuyến tính đối với x(t). Nếu nghiệm tổng quát của nó là $x = C\varphi(t) + \psi(t)$, trong đó C là hằng số tùy ý thì $y = [C\varphi(t) + \psi(t)]g(t) + f(t)$. Ta được phương trình tham số của các đường tích phân.

Ví dụ : Xét phương trình

$$y = xy'^2 + y'^2$$

Đặt $y' = t$, ta có $y = xt^2 + t^2$. Lấy đạo hàm hai vế đối với x, ta được

$$t^2 - t + 2t(x + 1)\frac{dt}{dx} = 0.$$

Nếu $t^2 - t \neq 0$, từ phương trình trên suy ra

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2x}{t-1} = \frac{2}{1-t}.$$

Đó là phương trình tuyến tính đối với x, nghiệm tổng quát của nó là $x = \dfrac{C}{(t-1)^2} - 1$, C là hằng số tùy ý, do đó $y = \dfrac{Ct^2}{(t-1)^2}$. Khử C giữa hai phương trình đó ta được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = (\sqrt{x+1} + C_1)^2$, với $C_1 = \sqrt{C}$.

Nếu $t^2 - t = 0$, thì hoặc $t = 0$, do đó $y = 0$, hoặc $t = 1$, do đó $y = x + 1$. $y = 0$ là nghiệm kì dị, còn $y = x + 1$ là nghiệm riêng của phương trình đã cho.

5.1.10. Quỹ đạo trực giao

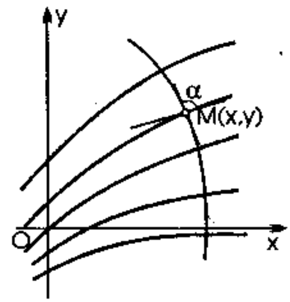
Trong mặt phẳng Oxy cho một họ đường $(\mathcal{C})$ phụ thuộc một tham số C có phương trình là

(5.19) $\qquad F(x, y, C) = 0.$

Những đường cắt tất cả các đường của họ $(\mathcal{C})$ dưới một góc $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ được gọi là những *quỹ đạo trực giao* của họ $(\mathcal{C})$ (hình 5.2).

Muốn tìm phương trình của các quỹ đạo trực giao của họ $(\mathcal{C})$, trước hết ta lập phương trình vi phân của họ $\mathcal{C}$ bằng cách khử C từ hai phương trình

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0 \\ \dfrac{d}{dx} F(x, y, C) = 0. \end{cases}$$



Hình 5.2

Ta sẽ được một phương trình liên hệ x, y và y'

(5.20) $\qquad f(x, y, y') = 0.$

Đạo hàm y' biểu thị hệ số góc của đường tiếp tuyến với đường của họ $(\mathcal{C})$ tại điểm M(x, y). Vì quỹ đạo trực giao của $(\mathcal{C})$ đi qua M cắt các đường của $(\mathcal{C})$ dưới góc $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, nên hệ số góc của tiếp tuyến của nó tại M là $y_1' = -\dfrac{1}{y'}$, do đó $y' = -\dfrac{1}{y_1'}$. Vậy phương trình vi phân của họ các quỹ đạo trực giao của $(\mathcal{C})$ chính là phương trình (5.20), trong đó ta đã thay y' bởi $-\dfrac{1}{y'}$.

(5.21) $\qquad f\left(x, y, -\dfrac{1}{y'}\right) = 0.$

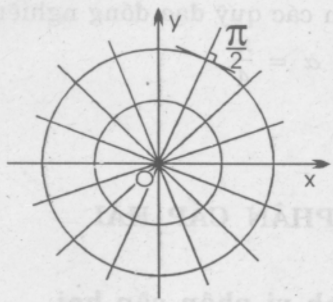
Nghiệm tổng quát của (5.21) cho ta họ các quỉ đạo trực giao.

Ví dụ 1 : Tìm các quỉ đạo trực giao của họ đường thẳng $y = Cx$ đi qua gốc tọa độ.

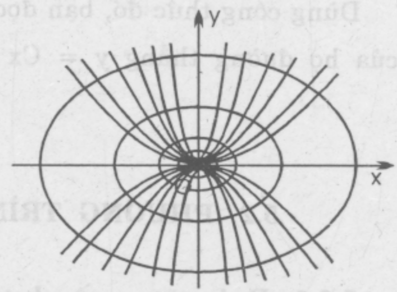
Khử C giữa hai phương trình $y = Cx$, $y' = C$, ta được phương trình vi phân của họ đường thẳng là $y' = \dfrac{y}{x}$. Do đó phương trình vi phân của các quỹ đạo trực giao của họ đường thẳng là $y' = -\frac{x}{y}$, đó là một phương trình với biến số phân li. Tích phân tổng quát của nó là

$$x^2 + y^2 = K^2, \text{ K là hằng số tùy ý.}$$

Vậy các quỹ đạo trực giao phải tìm là những đường tròn đồng tâm và có tâm ở gốc tọa độ (hình 5.3).



Hình 5.3



Hình 5.4

Ví dụ 2 : Tìm các quỹ đạo trực giao của họ parabôn $y = Cx^2$.

Khử C giữa hai phương trình $y = Cx^2$, $y' = 2Cx$, ta được phương trình vi phân của họ parabôn là

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}.$$

Do đó phương trình vi phân của họ các quỹ đạo trực giao là

$$-\frac{1}{yy'} = \frac{2}{x} \text{ hay } ydy = -\frac{xdx}{2}.$$

Tích phân tổng quát của nó là

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = K^2.$$

Vậy các quỹ đạo trực giao phải tìm là những đường elip có bán trục là $a = 2K$, $b = K\sqrt{2}$ (hình 5.4).

Chú thích. Đường cắt mọi đường của họ ($\mathscr{C}$) dưới góc α không đổi được gọi là *quỹ đạo đồng nghiêng* của họ ấy. Bạn đọc hãy chứng minh rằng phương trình vi phân của các quỹ đạo đồng nghiêng của họ ($\mathscr{C}$) là phương trình vi phân của ($\mathscr{C}$) trong đó y' được thay bằng $\dfrac{y' - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}\alpha y'}$

(5.22) $$f\left(x,\ y,\ \frac{y' - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}\alpha y'}\right) = 0.$$

Dùng công thức đó, bạn đọc hãy tìm các quỹ đạo đồng nghiêng của họ đường thẳng $y = Cx$ với góc $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

5.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

5.2.1. Đại cương về phương trình vi phân cấp hai

- Phương trình vi phân cấp hai là phương trình có dạng

(5.23) $$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Nếu giải được phương trình ấy đối với y'', nó có dạng

(5.24) $$y'' = f(x, y, y').$$

Ví dụ : $yy'' - y'^2 + yy' + x^2y^2 = 0$, $y'' - 2\dfrac{y}{x^2} = x\cos x$ là những phương trình vi phân cấp hai ; phương trình sau là tuyến tính.

- *Định lí 5.2 (sự tồn tại và duy nhất nghiệm). Cho phương trình*

(5.24) $$y'' = f(x, y, y').$$

Nếu $f(x, y, y')$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')$ *và* $\dfrac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ *liên tục trong một miền D nào đó trong* $\mathbf{R}^3$ *và nếu* (x_o, y_o, y'_o) *là một điểm thuộc D thì trong một lân cận nào đó của điểm* $x = x_o$, *tồn tại một nghiệm duy nhất* $y = y(x)$ *của phương trình (5.24) thỏa mãn các điều kiện*

$$(5.25) \qquad y\Big|_{x=x_o} = y_o\ ,\ y'\Big|_{x=x_o} = y_o',$$

Ta thừa nhận định lí này.

Bài toán tìm nghiệm của phương trình (5.24) thỏa mãn các điều kiện (5.25) được gọi là bài toán Cauchy của phương trình (5.24).

Về mặt hình học, định lí khẳng định rằng nếu $(x_o, y_o, y_o') \in D$ thì trong một lân cận nào đó của điểm (x_o, y_o) có một đường tích phân duy nhất của phương trình (5.24) đi qua điểm ấy, hệ số góc của tiếp tuyến của nó tại điểm ấy bằng y_o'.

- Người ta gọi nghiệm tổng quát của phương trình (5.24) là hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, trong đó C_1, C_2 là những hằng số tùy ý thỏa mãn các điều kiện sau :

1) Nó thỏa mãn phương trình (5.24) với mọi giá trị của C_1, C_2,

2) Với mọi (x_o, y_o, y_o') ở đó các điều kiện của định lí tồn tại và duy nhất nghiệm được thỏa mãn, có thể tìm được các giá trị xác định $C_1 = C_1^o$, $C_2 = C_2^o$ sao cho hàm số $y = \varphi(x, C_1^o, C_2^o)$ thỏa mãn

$$y\Big|_{x=x_o} = y_o,\ y'\Big|_{x=x_o} = y_o'.$$

Hệ thức $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ xác định nghiệm tổng quát của phương trình (5.24) dưới dạng ẩn được gọi là tích phân tổng quát của nó. Nó biểu diễn một họ đường tích phân phụ thuộc hai tham số.

Người ta gọi nghiệm riêng của phương trình (5.24) là một hàm số $y = \varphi(x, C_1^o, C_2^o)$ mà ta được bằng cách cho C_1, C_2 trong nghiệm tổng quát các giá trị xác định C_1^o, C_2^o. Hệ thức $\Phi(x, y, C_1^o, C_2^o) = 0$ được gọi là tích phân riêng.

5.1.2. Phương trình khuyết

- *Phương trình khuyết y, y' :* $F(x, y'') = 0$.

Đặt $y' = p$, ta được $F(x, p') = 0$, đó là một phương trình cấp một đối với p. Nếu nghiệm tổng quát của phương trình ấy là $p = f(x, C_1)$, thì $y = g(x, C_1) + C_2$, trong đó $g(x, C_1)$ là một nguyên hàm nào đó của $f(x, C_1)$.

Ví dụ : Giải phương trình $x = y''^2 + y'' + 1$.

Đặt $p = y'$, ta được $x = p'^2 + p' + 1$. Phương trình tham số của đường tích phân tổng quát của nó là

$$x = t^2 + t + 1,\ p = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C_1$$

(xem ví dụ mục 5.1.2). Do đó

$$y = \int p dx = \int \left(\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C_1\right)(2t + 1)\,dt =$$

$$= \int \left(\frac{4}{3}t^4 + \frac{5}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2C_1t + C_1\right)dt.$$

Phương trình tham số của tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$x = t^2 + t + 1,\ y = \frac{4}{15}t^5 + \frac{5}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + C_1t^2 + C_1t + C_2.$$

- *Phương trình khuyết y :* $F(x, y', y'') = 0$.

Đặt $p = y'$, ta được $F(x, p, p') = 0$, đó là một phương trình cấp một đối với p.

Ví dụ : Tìm một nghiệm riêng của phương trình

$$(1 - x^2)y'' - xy' = 2$$

thỏa mãn các điều kiện $y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 0$.

Đặt $y' = p$, ta có $y'' = p'$, vậy ta có

$$(1 - x^2)p' - xp = 2$$

Đó là một phương trình cấp một, tuyến tính đối với p. Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$(1 - x^2)\frac{dp}{dx} - xp = 0 \text{ hay } \frac{dp}{p} = \frac{xdx}{1-x^2}.$$

Suy ra

$$\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln(1 - x^2) + \ln|K| \text{ hay } p = \frac{K}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cho biến thiên hằng số K, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$K' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow K = 2\arcsin x + C_1,$$

C_1 là hằng số tùy ý. Do đó

$$p = \frac{2\arcsin x + C_1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Vậy

$$y = \int \frac{2\arcsin x + C_1}{\sqrt{1-x^2}}dx = (\arcsin x)^2 + C_1\arcsin x + C_2.$$

Đó là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho. Điều kiện $y\big|_{x=0} = 0$ cho ta $C_2 = 0$, điều kiện $y'\big|_{x=0} = 0$ cho ta $C_1 = 0$.

Vậy nghiệm riêng phải tìm là $y = (\arcsin x)^2$.

• *Phương trình khuyết x* : $F(y, y', y'') = 0$.

Đặt $y' = p$, ta có $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\cdot\frac{dp}{dy}$, do đó ta xem p là hàm số chưa biết của y. Phương trình trở thành $F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$. Đó cũng là một phương trình cấp một đối với p.

Ví dụ 1 : Giải phương trình $2yy'' = y'^2 + 1$.

Đặt $y' = p$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$, ta được phương trình

$$2yp\frac{dp}{dy} = p^2 + 1 \text{ hay } \frac{dy}{y} = \frac{2pdp}{p^2+1}.$$

Đó là phương trình cấp một đối với p, có biến số phân ly. Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln|y| = \ln(1 + p^2) + \ln|C_1| \text{ hay } y = C_1(1 + p^2).$$

Từ đó, ta có

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{2C_1pdp}{p} = 2C_1dp \Rightarrow dp = \frac{dx}{2C_1}$$

$$\Rightarrow p = \frac{x}{2C_1} + C_2.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1\left[\left(\frac{x}{2C_1} + C_2\right)^2 + 1\right] = C_1 + \frac{(x + 2C_1C_2)^2}{4C_1}.$$

Đặt $2C_1C_2 = -a$, $2C_1 = p$, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$2p\left(y - \frac{p}{2}\right) = (x - a)^2$$

nó biểu diễn một họ đường parabôn phụ thuộc hai tham số có đường chuẩn là trục x.

Ví dụ 2 : Bài toán về vận tốc vũ trụ cấp hai : xác định vận tốc nhỏ nhất mà ta phải phóng một vật thẳng đứng lên trên sao cho vật không trở lại quả đất. Sức cản của không khí xem như không đáng kể.

Gọi khối lượng của quả đất là M, của vật phóng lên là m, khoảng cách giữa tâm quả đất và trọng tâm của vật phóng là r. Theo định luật hấp dẫn của Newton, lực hút tác dụng lên vật là $f = k.\frac{Mm}{r^2}$, k là hằng số hấp dẫn.

Phương trình chuyển động của vật là

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -k\frac{Mm}{r^2}$$

hay

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -k\frac{M}{r^2}. \tag{5.26}$$

Ta sẽ tìm một nghiệm riêng của (5.26) thỏa mãn các điều kiện

$$r\Big|_{t=0} = R\,,\ \frac{dr}{dt}\Big|_{t=0} = v_o$$

trong đó R là bán kính quả đất, v_o là vận tốc phóng.

Phương trình (5.26) là một phương trình cấp hai của r(t) khuyết t. Đặt $v = \frac{dr}{dt}$, ta có $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr}$. Thế vào phương trình (5.26) ta được

$$v\frac{dv}{dr} = -k\frac{M}{r^2} \text{ hay } vdv = -\frac{kM}{r^2}dr.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\frac{v^2}{2} = kM\frac{1}{r} + C_1 \tag{5.27}$$

Từ điều kiện $v\Big|_{t=0} = v_o$ hay $v\Big|_{r=R} = v_o$, ta được

$$\frac{v_o^2}{2} = \frac{kM}{R} + C_1 \text{ hay } C_1 = \frac{v_o^2}{2} - \frac{kM}{R}.$$

Thế vào (5.27), ta được

$$\frac{v^2}{2} = \frac{M}{r} + \left(\frac{v_o^2}{2} - \frac{kM}{R}\right).$$

Vì vật phải chuyển động nên vận tốc v phải dương, do đó $\frac{v^2}{2}$ phải dương. Nhưng số hạng đầu của vế phải dần tới 0 khi r dần tới vô cùng, nên ta phải có

$$\frac{v_o^2}{2} - \frac{kM}{R} \geq 0 \text{ hay } v_o \geq \sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

Do đó vận tốc nhỏ nhất mà ta phải phóng vật lên là $v_o = \sqrt{\frac{2kM}{R}}$, trong đó $k = 6{,}68.10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\,.\,s^2}$, $R = 63.10^5$m.

Trên mặt đất, tức là khi $r = R$, gia tốc của trọng trường là $g = 9{,}81m/s^2$. Từ (5.26) suy ra $M = \frac{gR^2}{k}$. Vậy

$$v_o = \sqrt{2gR} = \sqrt{2\,.\,(9{,}81)\,.\,63\,.\,10^5} \simeq 11{,}2\,.\,10^3 \text{ m/s} =$$
$$= 11{,}2 \text{ km/s}.$$

Đó là vận tốc vũ trụ cấp hai.

Chú thích. Những phương trình cấp 2 khuyết còn được gọi là những *phương trình giảm cấp được*, vì có thể dễ dàng đưa chúng về những phương trình cấp 1.

5.2.3. Phương trình tuyến tính

Đó là phương trình vi phân có dạng

(5.28) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

trong đó p(x), q(x), f(x) là những hàm số liên tục. Phương trình được gọi là thuần nhất nếu $f(x) \equiv 0$, là không thuần nhất nếu $f(x) \not\equiv 0$.

- *Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất*

(5.29) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Định lí 5.3. Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình (5.29) thì $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, trong đó C_1 và C_2 là hai hằng số, cũng là nghiệm của phương trình đó.

Thật vậy, vì $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là nghiệm của phương trình (5.29) nên

$$y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)y_1 = 0$$
$$y_2'' + p(x)\,y_2' + q(x)y_2 = 0.$$

Nhân dòng trên với C_1, nhân dòng dưới với C_2 rồi cộng lại, ta được

$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$, vậy $C_1y_1 + C_2y_2$ là nghiệm của phương trình (5.29). ■

Định nghĩa 1. Hai hàm số $y_1(x)$, $y_2(x)$ được gọi là *độc lập tuyến tính* trên đoạn [a, b] nếu tỉ số $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq$ hằng số trên đoạn đó. Trong trường hợp trái lại, hai hàm số ấy được gọi là *phụ thuộc tuyến tính*.

Hai hàm số sinx và cosx độc lập tuyến tính trên **R** vì $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg}x \neq$ hằng số trên **R** ; hai hàm số $2e^{3x}$ và $5e^{3x}$ phụ thuộc tuyến tính vì $\dfrac{2e^{3x}}{5e^{3x}} = \dfrac{2}{5}$.

Định nghĩa 2. Cho hai hàm số $y_1(x)$, $y_2(x)$. Định thức

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

được gọi là *định thức Wronsky* của y_1, y_2 và được kí hiệu là $W(y_1, y_2)$ hay vắn tắt là W nếu không sợ nhầm lẫn.

Định lí 5.4. Nếu hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên [a, b] thì $W(y_1, y_2) \equiv 0$ trên đoạn đó.

Thật vậy, vì $y_2 = ky_1$ với k là hằng số nên $y'_2 = ky'_1$, do đó

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & ky_1 \\ y_1' & ky_1' \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y'_1 & y'_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \blacksquare$$

Định lí 5.5. Nếu định thức Wronsky $W(y_1, y_2)$ của hai nghiệm y_1, y_2 của phương trình tuyến tính thuần nhất (5.29) khác không tại một giá trị $x = x_o$ nào đó của đoạn [a, b], trên đó các hệ số p(x), q(x) liên tục, thì nó khác không với mọi x trên đoạn đó.

Chứng minh. *Vì $y_1(x)$, $y_2(x)$ là nghiệm của (5.29), ta có*

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0,\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0.$$

Nhân đẳng thức đầu với $-y_2$, đẳng thức sau với y_1 rồi cộng lại, ta được

(5.30) $$(y_1y_2'' - y_2y_1'') + p(x)(y_1y_2' - y_2y_1') = 0.$$

Nhưng

$$y_1y_2' - y_2y_1' = W,$$
$$W' = y_1y_2'' + y_1'y_2' - y_2y_1'' - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_2y_1''.$$

Vậy hệ thức (5.30) có thể viết là

$$W' + p(x)W = 0 \text{ hay } \frac{dW}{W} = -p(x)dx.$$

Tích phân hai vế, ta được

$$\ln|W| = -\int_{x_o}^{x} p(x)dx + \ln|C| \text{ hay } \ln\left|\frac{W}{C}\right| = -\int_{x_o}^{x} p(x)dx$$

Do đó

(5.31) $$W = Ce^{-\int_{x_o}^{x} p(x)dx}.$$

Thế $x = x_o$ vào hai vế, ta được $W(x_o) = C$. Vậy

(5.32) $$W(x) = W(x_o)\, e^{-\int_{x_o}^{x} p(x)dx}.$$

Vì $W(x_o) \neq 0$ theo giả thiết, nên $W(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$. ■

Công thức (5.32) cũng chứng tỏ rằng nếu $W(y_1, y_2)$ bằng không tại một giá trị x_o nào đó của đoạn [a, b] thì nó đồng nhất bằng không trên đoạn ấy.

Định lí 5.6. Nếu các nghiệm y_1, y_2 của phương trình (5.29) là độc lập tuyến tính trên đoạn [a, b] thì định thức Wronsky $W(y_1, y_2)$ khác không tại mọi điểm của đoạn ấy.

Thật vậy, giả sử W = 0 tại một điểm nào đó của đoạn [a, b]. Theo định lí 5.5, $W \equiv 0$ trên đoạn ấy, tức là $y_1y_2' - y_2y_1' = 0$, $\forall x \in [a, b]$. Tại những điểm của đoạn [a, b] ở đó $y_1 \neq 0$, ta có

$$\frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0.$$

Vậy tại những điểm ấy $\frac{y_2}{y_1} = k$, k là hằng số. Người ta cũng chứng minh được rằng $\frac{y_2}{y_1}$ là hằng số cả tại những điểm ở đó $y_1 = 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết y_1 và y_2 độc lập tuyến tính. Vậy $W \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$. ■

Định lí 5.7. Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (5.29) thì nghiệm tổng quát của (5.29) là

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \tag{5.33}$$

trong đó C_1, C_2 là những hằng số tùy ý.

Chứng minh. Theo định lí 5.3, $y = C_1y_1 + C_2y_2$ là nghiệm của (5.29). Ta cần chứng minh rằng với mọi điều kiện ban đầu cho trước, $y\big|_{x=x_o} = y_o$, $y'\big|_{x=x_o} = y_o'$, có thể tìm được những hằng số C_1, C_2 để nghiệm $C_1y_1 + C_2y_2$ tương ứng thỏa mãn các điều kiện ấy.

Thế các điều kiện ban đầu vào (5.33), ta được

$$\begin{cases} y_o = C_1y_{1o} + C_2y_{2o} \\ y_o' = C_1y_{1o}' + C_2y_{2o}' \end{cases} \tag{5.34}$$

trong đó $y_{1o} = y_1\big|_{x=x_o}$, $y_{2o} = y_2\big|_{x=x_o}$, $y_{1o}' = y_1'\big|_{x=x_o}$, $y_{2o}' = y_2'\big|_{x=x_o}$

(5.34) là một hệ hai phương trình đại số tuyến tính đối với C_1, C_2, định thức của hệ ấy là

$$\begin{vmatrix} y_{1o} & y_{2o} \\ y'_{1o} & y'_{2o} \end{vmatrix},$$

đó chính là giá trị của định thức Wronsky $W(y_1, y_2)$ tại $x = x_o$, nó khác không vì y_1, y_2 độc lập tuyến tính. Vậy có thể xác định được C_1, C_2 để $C_1y_1 + C_2y_2$ thỏa mãn các điều kiện ban đầu cho trước, do đó (5.33) là nghiệm tổng quát của phương trình (5.29). ■

Ví dụ : Phương trình $y'' + y = 0$ có 2 nghiệm riêng là $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, hai nghiệm ấy độc lập tuyến tính, vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1\cos x + C_2 \sin x$, C_1 và C_2 là hai hằng số tùy ý.

Chú thích 1. Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm phụ thuộc tuyến tính của phương trình (5.29), ta có $y_1(x) = K\, y_2(x)$ với K là một hằng số nào đó. Do đó, biểu thức $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, C_1 và C_2 là hai hằng số tùy ý, có thể viết là $y = (C_1K + C_2)\, y_2(x)$, nó thực sự chỉ phụ thuộc một hằng số tùy ý nên không là nghiệm tổng quát của phương trình (5.29).

Chú thích 2. Định lí 5.7 cho thấy muốn tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất (5.29), chỉ cần tìm 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của nó. Như chúng ta sẽ thấy ở dưới, có phương pháp để tìm được 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình tuyến tính thuần nhất với hệ số không đổi. Nhưng đối với phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số biến thiên, không có phương pháp tổng quát để giải quyết vấn đề đó. Tuy nhiên, định lí sau đây cho ta cách tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất với hệ số biến thiên nếu ta biết một nghiệm riêng khác 0 của nó.

Định lý 5.8. Nếu đã biết một nghiệm riêng $y_1(x) \neq 0$ của phương trình tuyến tính thuần nhất (5.29), ta có thể tìm được một nghiệm riêng $y_2(x)$ của phương trình đó, độc lập tuyến tính với $y_1(x)$, có dạng $y_2(x) = y_1(x).u(x)$.

Chứng minh. Đặt $y = y_1(x).u(x)$. Ta cần tìm $u(x)$ sao cho y thỏa mãn phương trình (5.29). Ta có

$$y' = y'_1u + y_1u' \; ; \; y'' = y''_1u + 2y'_1u' + y_1u''.$$

Thế vào phương trình (5.29), ta được

$$y_1u'' + (2y'_1 + py_1)u' + (y''_1 + py'_1 + qy_1)u = 0.$$

Nhưng $y''_1 + py'_1 + qy_1 = 0$, vì y_1 là một nghiệm của (5.29).

Vậy ta được phương trình cấp 2 đối với u, khuyết u :

$$y_1u'' + (2y'_1 + py_1)u' = 0.$$

Đặt $u' = v$, ta được phương trình cấp 1 đối với v

$$y_1 v' + (2y'_1 + py_1)v = 0$$

hay

$$\frac{dv}{v} = -\left(\frac{2y'_1}{y_1} + p\right)dx.$$

Lấy tích phân hai vế

$$\ln|v| = -2\ln|y_1| - \int p(x)dx = -2\ln|y_1| + \varphi(x) + \ln|C_1|,$$

$\varphi(x)$ là một nguyên hàm nào đó của $-p(x)$, vậy

$$v = C_1\frac{e^{\varphi(x)}}{y_1^2} = C_1 g(x), \text{ với } g(x) = \frac{e^{\varphi(x)}}{y_1^2}.$$

Do đó

$$u = C_1\int g(x)dx = C_1G(x) + C_2,$$

trong đó G(x) là một nguyên hàm của g. Ta được

$$y = [C_1G(x) + C_2]\,y_1 = C_1y_1G(x) + C_2y_1.$$

Chọn $C_2 = 0$, $C_1 = 1$, ta được $y_2 = y_1G(x)$, đó là một nghiệm của (5.29), độc lập tuyến tính với y_1, vì

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = G'(x) = g(x) = \frac{e^{\varphi(x)}}{y_1^2} \neq 0 \;\blacksquare$$

Ví dụ : Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Dễ thấy rằng $y_1 = x$ là một nghiệm riêng. Ta tìm một nghiệm riêng khác, có dạng $y_2 = x.u(x)$. Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$u''x(1 - x^2) + 2u' = 0.$$

Đặt $u' = v$, ta có

$$v'x(1 - x^2) + 2v = 0$$

hay

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x(1 - x^2)}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$v = K_1 \frac{1 - x^2}{x^2} = K_1 \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$$

K_1 là hằng số tùy ý. Chọn $K_1 = -1$ ta được $v = 1 - \frac{1}{x^2}$, do đó $u = x + \frac{1}{x} + K_2$. Chọn $K_2 = 0$, ta được $u = x + \frac{1}{x}$, vậy $y_2 = x.u = x^2 + 1$. Hai nghiêm $y_1 = x$, $y_2 = x^2 + 1$ là độc lập tuyến tính, nên nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1x + C_2(x^2 + 1),$$

C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý.

Chú thích. Cũng có thể tìm y_2 từ công thức (5.31). Chia hai vế của công thức ấy cho y_1^2, ta được

$$\frac{y_1y'_2 - y_2y'_1}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Nhưng vế trái là $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$, vậy

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int p(x)dx}dx + K.$$

Chọn C = 1, K = 0, ta được

(5.35) $$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} . e^{-\int p(x)dx}dx.$$

Như vậy nếu phương trình (5.29) có một nghiệm riêng là $y_1(x)$ thì nghiệm tổng quát của nó là

$$(5.36) \qquad y = C_1y_1 + C_2y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p(x)dx}dx .$$

Trở lại ví dụ trên. Phương trình $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ có một nghiệm riêng là $y_1 = x$. Chia hai vế của phương trình cho $(1 - x^2)$, ta thấy $p(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$, do đó

$$-\int p(x)dx = \int \frac{2x}{x^2 - 1}dx = \ln(x^2 - 1).$$

Vậy $\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx = \int \frac{1}{x^2} e^{\ln(x^2 - 1)} dx = \int \frac{x^2 - 1}{x^2} dx = x + \frac{1}{x}$.

Theo công thức (5.36) ta được

$$y = C_1x + C_2x\left(x + \frac{1}{x}\right) = C_1x + C_2(x^2 + 1).$$

• *Phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất*

$$(5.28) \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

Định lí 5.9. Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (5.28) bằng tổng của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (5.29) với một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất (5.28).

Thậy vậy, gọi $\bar{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình (5.29), Y là một nghiệm riêng nào đó của phương trình (5.28). Đặt $y = \bar{y} + Y$. Ta có $y' = \bar{y}' + Y'$, $y'' = \bar{y}'' + Y''$. Thế vào phương trình (5.28), ta được

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= \bar{y}'' + Y'' + p(x)(\bar{y}' + Y') + q(x)(\bar{y} + Y) \\ &= [\bar{y}'' + p(x)\bar{y}' + q(x)\bar{y}] + [Y'' + p(x)Y' + q(x)Y]. \end{aligned}$$

Nhưng theo giả thiết

$$\bar{y}'' + p(x)\bar{y}' + q(x)\bar{y} = 0$$

$$Y'' + p(x)Y' + q(x)Y = f(x),$$

do đó

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

Vậy $y = \overline{y} + Y$ cũng là nghiệm của phương trình (5.28). Vì $\overline{y}$ phụ thuộc hai hằng số tùy ý nên $y = \overline{y} + Y$ cũng phụ thuộc hai hằng số tùy ý, do đó có thể chứng minh nó là nghiệm tổng quát của phương trình (5.28) như trong chứng minh định lí 5.7. ■

Định lí 5.10. (Nguyên lí chồng nghiệm). *Cho phương trình*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

Nếu $y_1(x)$ *là một nghiệm riêng của phương trình*

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)y = f_1(x),$$

$y_2(x)$ *là một nghiệm riêng của phương trình*

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)y = f_2(x)$$

thì $y = y_1(x) + y_2(x)$ *là một nghiệm riêng của phương trình đã cho.*

Thật vậy, ta có

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)y = (y_1+y_2)'' + p(x)\,(y_1+y_2)' + q(x)\,(y_1+y_2) =$$

$$= [y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + [y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] =$$

$$= f_1(x) + f_2(x).$$

Vậy $y = y_1(x) + y_2(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình đã cho.

Phương pháp biến thiên hằng số. Giả sử đã biết nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất (5.29) là

$$(5.37) \qquad y = C_1y_1 + C_2y_2,$$

trong đó C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý. Bây giờ xem C_1, C_2 là hai hàm số, ta tìm C_1, C_2 để cho (5.37) là một nghiệm của phương trình không thuần nhất (5.28). Ta có

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + C_1'y_1 + C_2'y_2.$$

Chọn C_1, C_2 sao cho

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0.$$

Khi đó

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2'$$
$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2'.$$

Thế vào phương trình (5.28), ta được

$$C_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) + \\ + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Vì y_1, y_2 là hai nghiệm của phương trình thuần nhất (5.29) nên các biểu thức trong dấu ngoặc của vế trái bằng không, ta được

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Vậy hàm số (5.37) là nghiệm của phương trình (5.28) nếu C_1, C_2 thỏa mãn hệ phương trình

$$(5.38) \qquad \begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases}$$

Định thức của hệ phương trình ấy chính là định thức Wronsky của hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất (5.29), nó luôn khác 0. Vì vậy hệ phương trình trên có một nghiệm duy nhất. Giả sử $C_1' = \varphi_1(x)$, $C_2' = \varphi_2(x)$. Lấy tích phân, ta được

$$C_1 = \Phi_1(x) + K_1, \qquad C_2 = \Phi_2(x) + K_2,$$

trong đó $\Phi_1(x)$ là một nguyên hàm của $\varphi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ là một nguyên hàm của $\varphi_2(x)$; K_1, K_2 là hai hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (5.28) là

$$y = K_1y_1 + K_2y_2 + \Phi_1(x) \cdot y_1 + \Phi_2(x) \cdot y_2.$$

Ví dụ : Giải phương trình

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 1 - x^2.$$

Nếu $x \neq \pm 1$, phương trình có thể viết là

$$y'' + \frac{2x}{1 - x^2}y' - \frac{2}{1 - x^2}y = 1.$$

Ta đã biết nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = C_1x + C_2(x^2 + 1),$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý (xem ví dụ trang 225). Biểu thức ấy là nghiệm của phương trình không thuần nhất đã cho nếu C_1, C_2 là những hàm số thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} C_1'x + C_2'(x^2 + 1) = 0 \\ C_1' + C_2' 2x = 1 . \end{cases}$$

Giải hệ đó ta được

$$C_1' = -\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\left(1 + \frac{2}{x^2 - 1}\right),$$

$$C_2' = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Do đó

$$C_1 = -\left(x + \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right|\right) + K_1,\ C_2 = \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + K_2,$$

trong đó K_1, K_2 là những hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = -x\left(x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + \frac{1}{2}(x^2 + 1)\ln|x^2 - 1| + K_1x + K_2(x^2 + 1).$$

5.2.4. Phương trình tuyến tính có hệ số không đổi

• *Phương trình thuần nhất.* Cho phương trình

(5.39) $$y'' + py' + qy = 0$$

trong đó p, q là hai hằng số. Ta biết rằng muốn tìm nghiệm tổng quát của nó, chỉ cần tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính. Ta sẽ tìm nghiệm riêng của nó dưới dạng

(5.40) $$y = e^{kx},$$

trong đó k là một hằng số nào đó mà ta sẽ tìm. Ta có $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$. Thế vào phương trình (5.39), ta được

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Vì $e^{kx} \neq 0$, ta có

(5.41) $$k^2 + pk + q = 0.$$

Vậy nếu k thỏa mãn phương trình (5.41) thì hàm số $y = e^{kx}$ là một nghiệm của phương trình (5.39). Phương trình (5.41) được gọi là phương trình đặc trưng của phương trình vi phân (5.39). Đó là một phương trình bậc hai, nó có hai nghiệm k_1, k_2 thực hay phức. Có thể xảy ra ba trường hợp :

1) *Hai số k_1, k_2 thực và khác nhau.* Khi ấy phương trình (5.39) có hai nghiệm

$$y_1 = e^{k_1x}, \; y_2 = e^{k_2x}.$$

Hai nghiệm ấy độc lập tuyến tính vì $\dfrac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq$ hằng số. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (5.39) là

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x},$$

C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý.

Ví dụ : Tìm nghiệm của phương trình

$$y'' + y' - 2y = 0$$

thỏa mãn các điều kiện

$$y|_{x=0} = 0, \; y'|_{x=0} = 1.$$

Phương trình đặc trưng của phương trình đã cho là $k^2 + k - 2 = 0$, nó có 2 nghiệm phân biệt $k_1 = 1$, $k_2 = -2$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

Do đó

$$y' = C_1e^x - 2C_2e^{-2x}.$$

Từ các điều kiện ban đầu ta được

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - 2C_2 = 1 \end{cases}$$

Do đó $C_1 = \dfrac{1}{3}$, $C_2 = -\dfrac{1}{3}$, vậy nghiệm riêng phải tìm là

$$y = \frac{1}{3}e^{x} - \frac{1}{3}e^{-2x}.$$

2) *k_1 và k_2 là hai số thực trùng nhau $k_1 = k_2$.* Ta đã có một nghiệm riêng của phương trình (5.39) là $y_1 = e^{k_1x}$. Ta sẽ tìm một nghiệm riêng y_2 độc lập tuyến tính với y_1 dưới dạng $y_2 = y_1.u(x) = u(x)\,e^{k_1x}$. Ta có

$$y'_2 = u'.e^{k_1x} + k_1ue^{k_1x}$$

$$y''_2 = u''e^{k_1x} + 2k_1u'e^{k_1x} + k_1^2\,ue^{k_1x}.$$

Thế vào phương trình (5.39), ta được

$$e^{k_1x}[u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)\,u] = 0.$$

Vì k_1 là nghiệm kép của phương trình đặc trưng nên ta có

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0, \qquad k_1 = -\frac{p}{2} \text{ hay } 2k_1 + p = 0.$$

Do đó ta được $e^{k_1x}u'' = 0$ hay $u'' = 0$. Suy ra $u = Ax + B$, trong đó A, B là những hằng số tùy ý. Chọn $A = 1$, $B = 0$, ta được $u = x$, vậy $y_2(x) = xe^{k_1x}$. Như vậy hai nghiệm độc lập tuyến tính của (5.39) là $y_1(x) = e^{k_1x}$, $y_2(x) = xe^{k_1x}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (5.39) là

$$y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x).$$

Ví dụ : Giải phương trình

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Phương trình đặc trưng của nó là $k^2 - 6k + 9 = 0$, nó có một nghiệm kép $k = 3$, vậy nghiệm tổng quát của nó là

$$y = e^{3x}(C_1x + C_2).$$

3) k_1 *và* k_2 *là hai số phức liên hợp :* $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$. Hai nghiệm riêng của phương trình (5.39) là

$$\bar{y}_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x}$$

$$\bar{y}_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x}.$$

Dùng công thức Euler

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x, \ e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x,$$

ta được

$$\bar{y}_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$\bar{y}_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Nếu $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ là hai nghiệm của phương trình (5.39) thì

$$y_1 = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

cũng là nghiệm của phương trình ấy. Hai nghiệm ấy lại độc lập tuyến tính vì $\frac{y_1}{y_2} = \text{cotg}\beta x$ khác hằng số. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (5.39) là

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Ví dụ : Giải phương trình $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Phương trình đặc trưng của nó là $k^2 - 2k + 5 = 0$, nó có hai nghiệm phức liên hợp $k_1 = 1 + 2i$, $k_2 = 1 - 2i$. Vậy nghiệm tổng quát của nó là

$$y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

Chú thích. Đối với phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số không đổi cấp cao hơn hai, phương pháp giải cũng tương tự như đối với phương trình cấp hai.

Ví dụ 1 : Giải phương trình $y''' - 4y' = 0$.

Phương trình đặc trưng của nó là $k^3 - 4k = 0$, nó có ba nghiệm là $k = 0$, $k = 2$, $k = -2$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x}.$$

Ví dụ 2 : Giải phương trình $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Phương trình đặc trưng $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ hay $(k^2 + 1)^2 = 0$ có hai nghiệm kép $k = i$ và $k = -i$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x$$

• *Phương trình không thuần nhất.* Cho phương trình

(5.40) $\qquad y'' + py' + qy = f(x),$

trong đó p, q là những hằng số. Ở trên, ta đã tìm được nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (5.39). Vậy chỉ việc áp dụng phương pháp biến thiên hằng số để tìm nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (5.40). Nhưng đối với một số dạng đặc biệt của vế phải f(x), có thể tìm được một nghiệm riêng của phương trình (5.40) mà không cần một phép tính tích phân nào. Chỉ cần cộng nghiệm riêng ấy vào nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (5.39), ta sẽ được nghiệm tổng quát của (5.40).

Ta sẽ tìm nghiệm riêng của (5.40) trong hai trường hợp sau :

• *Trường hợp 1* : $f(x) = e^{\alpha x} . P_n(x)$, trong đó $P_n(x)$ là một đa thức bậc n, α là một hằng số.

Nếu α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng của (5.39), ta tìm một nghiệm riêng của (5.40) có dạng

(5.41) $\qquad Y = e^{\alpha x} Q_n(x),$

trong đó $Q_n(x)$ là một đa thức bậc n, (n+ 1) hệ số của nó sẽ được xác định như sau. Ta có

$$Y' = \alpha Q_n(x)e^{\alpha x} + Q'_n(x)e^{\alpha x}$$

$$Y'' = \alpha^2 Q_n(x)e^{\alpha x} + 2\alpha Q'_n(x)e^{\alpha x} + Q''_n(x)e^{\alpha x}.$$

Thế vào (20), ta được

$$e^{\alpha x}[Q''_n(x) + (2\alpha + p)Q'_n(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x)] = e^{\alpha x}P_n(x).$$

Suy ra

(5.42) $\qquad Q''_n(x) + (2\alpha + p)Q'_n(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x).$

Vì α không là nghiệm của phương trình đặc trưng của (5.39), nên $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$, do đó vế trái của đẳng thức (5.42) cũng là một đa thức bậc n, cùng bậc với đa thức ở vế phải.

Bằng cách đồng nhất hệ số của các số hạng cùng bậc ở hai vế của đẳng thức (5.42), ta được (n + 1) phương trình bậc nhất của (n+1) ẩn là các hệ số của $Q_n(x)$. Phương pháp tìm các hệ số của $Q_n(x)$ nêu trên được gọi là phương pháp *hệ số bất định.*

Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng thì $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, $(2\alpha + p) \neq 0$. Khi đó vế trái của đẳng thức (5.42) là một đa thức bậc (n − 1). Ta nâng bậc của nó lên một đơn vị mà không tăng số các hệ số của nó, muốn vậy chỉ việc thay $Q_n(x)$ bởi $xQ_n(x)$. Do đó, trong trường hợp này, ta sẽ tìm một nghiệm riêng của (5.40) có dạng

(5.43) $$Y = xe^{\alpha x}Q_n(x).$$

Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng thì $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, $2\alpha + p = 0$. Vế trái của đẳng thức (5.42) là một đa thức bậc (n−2). Lập luận tương tự như trên, ta thấy rằng phải tìm một nghiệm riêng của (5.40) có dạng

(5.44) $$Y = x^2e^{\alpha x}Q_n(x).$$

Ví dụ 1 : Giải phương trình $y'' + 3y' - 4y = x$.

Phương trình đặc trưng $r^2 + 3r - 4 = 0$ có hai nghiệm đơn $r = 1$, $r = -4$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $y = C_1e^x + C_2e^{-4x}$. Vế phải của phương trình có dạng $e^{\alpha x} P_1(x)$, trong đó $\alpha = 0$, $P_1(x) = x$.

$\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, vậy ta tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$Y = Ax + B.$$

Thế vào phương trình trên, ta được

$$-4Ax + 3A - 4B = x.$$

Suy ra : $-4A = 1$, $3A - 4B = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{3}{16} \Rightarrow$ $Y = -\frac{x}{4} - \frac{3}{16}$. Nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \frac{x}{4} - \frac{3}{16}.$$

Ví dụ 2 : Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' - y' = e^x(x + 1).$$

Phương trình đặc trưng $r^2 - r = 0$ có hai nghiệm $r = 0$, $r = 1$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $y = C_1 + C_2e^x$. Vế phải của phương trình đã cho có dạng $e^{\alpha x}P_1(x)$, với $\alpha = 1$ là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng, vậy ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$Y = xe^x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx).$$

Ta có

$$Y' = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B)$$

$$Y'' = e^x(Ax^2 + Bx) + 2e^x(2Ax + B) + e^x.2A.$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$e^x(2Ax + B + 2A) = e^x(x + 1).$$

Do đó $2A = 1$, $B + 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = 0 \Rightarrow Y = \frac{1}{2}x^2e^x$.

Nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = C_1 + C_2e^x + \frac{1}{2}x^2e^x.$$

Ví dụ 3 : Giải phương trình $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}$.

Phương trình đặc trưng có nghiệm kép $r = 3$, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $y = (C_1x + C_2)e^{3x}$. Ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$Y = x^2e^{3x}(Ax + B) = e^{3x}(Ax^3 + Bx^2).$$

Ta có

$$Y' = 3e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + e^{3x}(3Ax^2 + 2Bx),$$

$$Y'' = 9e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + 6e^{3x}(3Ax^2 + 2Bx) + e^{3x}(6Ax + 2B).$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$e^{3x}\,[(6A - 10B)\,x + 2B] = xe^{3x}.$$

Suy ra $6A - 10B = 1$, $B = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{6}, B = 0 \Rightarrow Y = \frac{x^3}{6}e^{3x}$.

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = (C_1x + C_2)e^{3x} + \frac{x^3}{6}e^{3x}.$$

• *Trường hợp 2 :* $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x$, trong đó $P_m(x)$, $P_n(x)$ là những đa thức bậc m, n ; β là hằng số.

Người ta chứng minh được rằng

Nếu $\pm\, i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng thì có thể tìm một nghiệm riêng của phương trình (5.40) có dạng

(5.45) $$Y = Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x,$$

trong đó $Q_l(x)$, $R_l(x)$ là những đa thức bậc $l = \max(m,n)$.

Nếu $\pm\, i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng thì có thể tìm một nghiệm riêng của phương trình (5.40) có dạng

(5.46) $$Y = x[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x].$$

Ví dụ 1 : Giải phương trình $y'' + y = x\sin x$.

Phương trình đặc trưng $r^2 + 1 = 0$ có nghiệm $\pm\, i$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $y = C_1\cos x + C_2\sin x$. Vế phải của phương trình đã cho có dạng $R_1(x)\sin\beta x$, trong đó $R_1(x) = x$, $\beta = 1$, nhưng $\pm\, i\beta = \pm\, i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$Y = x\,[(Ax + B)\cos x + (A_1x + B_1)\sin x].$$

Tính Y', Y'' rồi thế vào phương trình đã cho, ta được

$$[4A_1x + 2(A + B_1)]\cos x + [-4Ax + 2(A_1 - B)]\sin x = x\sin x.$$

Do đó $4A_1 = 0$, $A + B_1 = 0$, $-4A = 1$, $A_1 - B = 0$. Suy ra $A = -\frac{1}{4}$, $B_1 = \frac{1}{4}$, $A_1 = 0$, $B = 0$. Vậy $Y = \frac{x}{4}(\sin x - x\cos x)$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là :

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}(\sin x - x\cos x).$$

Ví dụ 2 : Giải phương trình $y'' - y' = 2\cos^2 x$.

Phương trình đặc trưng $r^2 - r = 0$ có hai nghiệm $r = 0$, $r = 1$. Nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng là $y = C_1 + C_2e^x$. Vế phải của phương trình đã cho là $f(x) = 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$. Theo nguyên lý chồng nghiệm, ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng tổng $Y_1 + Y_2$, Y_1 là nghiệm riêng của phương trình với vế phải $f_1(x) = 1$, Y_2 là nghiệm riêng của phương trình với vế phải $f_2(x) = \cos 2x$. Vì $f_1(x) = 1 = e^{\alpha x}$ với $\alpha = 0$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên Y_1 có dạng Ax. Thế vào phương trình, ta được $A = -1$, vậy $Y_1 = -x$. Vì $f_2(x) = \cos 2x$, mà $\pm 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên $Y_2 = B\cos 2x + C\sin 2x$. Thế vào phương trình, ta được $B = -\frac{2}{10}$, $C = -\frac{1}{10}$, vậy $Y_2 = -\frac{2}{10}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x$. Vậy nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = C_1 + C_2e^x - x - \frac{2}{10}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x.$$

Chú thích 1. Nếu $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]$, ta có thể đưa về phương trình với vế phải có dạng đã xét ở trên bằng cách đặt $y = e^{\alpha x}.z$.

Ví dụ : Giải phương trình $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}\sin x$.

Đặt $y = e^{-x}z$. Ta có

$$y' = e^{-x}z' - e^{-x}z,\ y'' = e^{-x}z'' - 2e^{-x}z' + e^{-x}z.$$

Thế vào phương trình, ta được

$$z'' + z = x\sin x.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là

$$z = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}(\sin x - x\cos x)$$

(xem ví dụ 1). Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = e^{-x}\left[C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}(\sin x - x\cos x)\right].$$

Chú thích 2. Đối với phương trình tuyến tính không thuần nhất, có hệ số không đổi, cấp cao hơn hai, cũng có thể tìm nghiệm riêng tương tự như đối với phương trình cấp hai.

Ví dụ : Giải phương trình $y^{(4)} + 2y'' + y = \cos x$.

Ở trên ta đã thấy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x$, vì phương trình đặc trưng $(k^4 + 2k^2 + 1) = 0$ có hai nghiệm kép $k = i$ và $k = -i$. Vế phải của phương trình đã cho là $\cos x$, do đó ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng

$$y = x^2(A\cos x + B\sin x).$$

Thay vào phương trình đã cho, ta tìm được

$$A = -\frac{1}{8},\ B = 0.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x - \frac{1}{8}x^2\cos x.$$

5.2.5. Phương trình Euler

Đó là phương trình tuyến tính có hệ số biến thiên dạng

$$(5.47) \qquad x^2y'' + axy' + by = 0,$$

trong đó a, b là những hằng số. Thực hiện phép đổi biến số

$$|x| = e^t \text{ hay } t = \ln|x|$$

ta có

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x},$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Thế vào phương trình (5.47), ta được

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0, \tag{5.48}$$

đó là một phương trình tuyến tính có hệ số không đổi.

Ví dụ : Giải phương trình $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$.

Bằng phép đổi biến số $x = e^t$, phương trình được đưa về dạng

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

Phương trình đặc trưng của phương trình này $r^2 + r - 6 = 0$ có hai nghiệm $r = 2$, $r = -3$, vậy

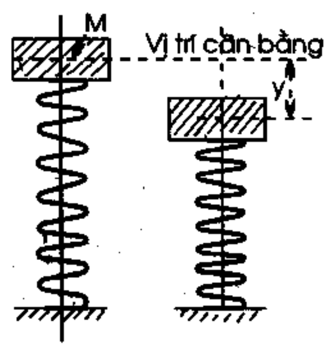
$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^3}.$$

5.2.6. Phương trình dao động

Giả sử có một vật có khối lượng M được đặt trên một lò xo đàn hồi (hình 5.5). Chọn trục Oy thẳng đứng hướng từ trên xuống, gốc O đặt ở trọng tâm của vật ở vị trí cân bằng. Gọi y là độ dời tính từ vị trí cân bằng. Giả sử lực kéo vật về vị trí cân bằng tỷ lệ với độ dời, nghĩa là bằng $-ky$, k là hệ số đàn hồi của lò xo, còn lực cản hướng ngược chiều chuyển động và tỷ lệ với vận tốc của vật, nghĩa là bằng $-\lambda\frac{dy}{dt}$, λ là hằng số dương.



Hình 5.5

Theo định luật Newton, phương trình chuyển động của vật trên lò xo là

$$M \frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda \frac{dy}{dt}$$

hay, nếu đặt $p = \frac{\lambda}{M}$, $q = \frac{k}{M}$,

(5.49) $\qquad y'' + py' + qy = 0.$

Phương trình đặc trưng của nó $k^2 + pk + q = 0$ có hai nghiệm là

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},\ k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Nếu $\frac{p^2}{4} > q$ thì k_1, k_2 là hai số âm. Nghiệm tổng quát của phương trình (5.49) là

$$y = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t}.$$

Do đó, với mọi điều kiện ban đầu, độ dời $y \to 0$ khi $t \to +\infty$. Trong trường hợp này, không có dao động, vì lực cản quá lớn.

Nếu $\frac{p^2}{4} = q$ thì $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$. Nghiệm tổng quát của (5.49) là

$$y = (C_1 + C_2t)\, e^{-\frac{p}{2}t}$$

Trong trường hợp này, độ dời y cũng dần đến 0 khi $t \to +\infty$, nhưng không nhanh như trường hợp trước.

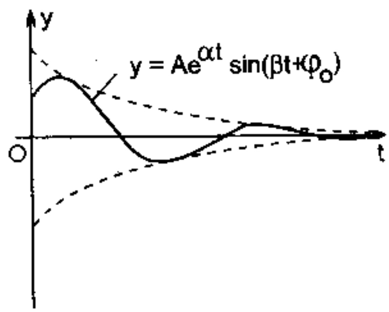
Nếu $\frac{p^2}{4} < q$ thì $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, trong đó $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Nghiệm tổng quát của phương trình (5.49) là

$$y = e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t).$$

Đặt $C_1 = A\sin\varphi_o$, $C_2 = A\cos\varphi_o$, ta có $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\varphi_o = \operatorname{arctg}\frac{C_1}{C_2}$. Thế C_1, C_2 vào biểu thức của y, ta được biểu thức của nghiệm tổng quát của phương trình (5.49) là

$$y = e^{\alpha t} A\sin(\beta t + \varphi_o).$$

Trong trường hợp này vật dao động với biên độ $Ae^{\alpha t}$ phụ thuộc vào thời gian. Vì $\alpha = -\frac{p}{2} < 0$, nên biên độ dần đến 0 khi $t \to +\infty$. Vậy chuyển động của vật là một dao động tắt dần. Đồ thị của dao động tắt dần được biểu diễn trên hình 5.6.



Hình 5.6

Đặc biệt nếu $p = 0$, tức là vật chuyển động không bị lực cản thì nghiệm tổng quát của phương trình (5.49) là $y = C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t = A\sin(\beta t + \varphi_o)$. Chuyển động của vật là một dao động điều hòa có chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\beta}$.

5.2.7. Nghiệm khai triển được thành chuỗi lũy thừa

Giả sử ta muốn tìm nghiệm khai triển được dưới dạng chuỗi lũy thừa của phương trình tuyến tính thuần nhất

(5.29) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Đặt

(5.50) $$y = a_o + a_1 x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Lấy đạo hàm y từng số hạng một cách hình thức hai lần, thế vào phương trình (5.29), ta được một chuỗi lũy thừa đồng nhất bằng không. Cho các hệ số của chuỗi lũy thừa này bằng không, ta xác định được các hệ số trong (5.50). Nếu chuỗi lũy thừa (5.50) với các hệ số đã được xác định như vậy hội tụ trong một khoảng nào đó thì nó là nghiệm của phương trình (5.50) trong khoảng ấy, vì có thể lấy đạo hàm từng số hạng một chuỗi lũy thừa trong khoảng hội tụ của nó.

Ví dụ 1 : Tìm nghiệm khai triển được thành chuỗi lũy thừa của phương trình

$$xy'' + 2y' + xy = 0.$$

Đặt

$$y = a_o + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Ta có

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 2.3a_3x + 3.4a_4x^2 + \dots + (n-1)na_nx^{n-2} + \dots$$

Thế vào phương trình trên, rút gọn các số hạng đồng dạng, ta được

$$2a_1 + (6a_2 + a_o)x + (12a_3 + a_1)x^2 + \dots + [(n^2 + n)a_n + a_{n-2}]\,x^{n-1} + \\ + \dots = 0.$$

Do đó

$$a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{a_o}{6},\ a_3 = -\frac{a_1}{12} = 0,\ \dots,\ a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)} \quad n > 2.$$

Vậy nếu $n = 2k + 1$ thì $a_n = 0$; nếu $n = 2k$ thì

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2k(2k+1)},\ a_{2k-2} = -\frac{a_{2k-4}}{(2k-4)(2k-3)},\ \dots,\ a_4 = -\frac{a_2}{4.5},$$

$$a_2 = -\frac{a_o}{2.3} \Rightarrow a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,a_o.$$

Do đó

$$y = a_o\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!} + \dots\right),$$

a_o là một hằng số tùy ý. Có thể tính được dễ dàng bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa này bằng ∞, do đó nó thỏa mãn phương trình đã cho với mọi x.

Chú ý rằng chuỗi lũy thừa trong dấu ngoặc là khai triển của $\frac{\sin x}{x}$. Vậy nghiệm đã tìm được là $y = a_o\frac{\sin x}{x}$.

Ví dụ 2 : Tìm nghiệm khai triển được thành chuỗi lũy thừa của phương trình

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0$$

Cũng như trên, thế (5.50) vào phương trình đã cho, ta được

$$(4a_o + 2a_2) + (3a_1 + 6a_3)x + 12a_4x^2 + (20a_5 - 5a_3)x^3 + \dots$$
$$+ [(n + 2)(n + 1)a_{n+2} - (n^2 - 4)a_n]x^n + \dots = 0.$$

Do đó

$$a_2 = -2a_o,\ a_3 = -\frac{1}{2}a_1,\ a_4 = 0,\ a_5 = \frac{1}{4}a_3, \dots,$$

$$a_{n+2} = \frac{n-2}{n+1}a_n,\ n = 2, 3, 4, \dots$$

Vậy

$$a_{2k} = 0 \text{ với } k \geqslant 2$$

$$a_5 = \frac{1}{4}a_3, a_7 = \frac{3}{6}a_5, \dots, a_{2k+1} = \frac{2k-3}{2k}a_{2k-1}, \dots$$

Suy ra

$$a_{2k+1} = -\frac{1.3.5\dots(2k-3)}{2.4.6\dots(2k)}a_1 = -\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}a_1,\ k \geqslant 2,$$

trong đó $(2k)!! = 2.4.6\dots(2k)$, $(2k - 3)!! = 1.3.5\dots(2k - 3)$. Vậy nghiệm khai triển được thành chuỗi lũy thừa phải tìm là

$$y = a_o(1 - 2x^2) + a_1\left(x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2.4} - \dots - \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^{2k+1} - \dots\right),$$

trong đó a_o, a_1 là những hằng số tùy ý.

Để tính bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa, ta tính

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}\cdot\frac{(2k)!!}{(2k-3)!!} = \lim_{k\to\infty}\frac{2k-1}{2k+2} = 1.$$

Vậy bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \dfrac{1}{\rho} = 1$. Vậy chuỗi lũy thừa hội tụ trong khoảng $-1 < x < 1$. Bạn đọc hãy xét sự hội tụ của chuỗi tại các mút $x = \pm 1$.

Dễ dàng thấy rằng $y_1(x) = 1 - 2x^2$ là một nghiệm riêng của phương trình đã cho.

Chú thích. Các phương trình trong những ví dụ trên đều là phương trình với hệ số biến thiên.

5.3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

5.3.1. Đại cương

• Người ta gọi *hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp một* là hệ có dạng

$$(5.51)\qquad \begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

trong đó x là biến số độc lập, $y_1, y_2, ..., y_n$ là các hàm số phải tìm.

• *Định lí 5.11. (Sự tồn tại và duy nhất nghiệm). Cho hệ phương trình vi phân (5.51). Giả sử các hàm số $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ cùng với các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$, liên tục trong một miền D trong $\mathbf{R}^{n+1}$.*

Giả sử $(x_o, y_1^o, y_2^o, ..., y_n^o)$ là một điểm thuộc D. Khi đó trong một lân cận nào đó của điểm $x = x_o$ có một nghiệm duy nhất của hệ (5.51) thỏa mãn các điều kiện

$$y_1\Big|_{x=x_o} = y_1^o,\quad y_2\Big|_{x=x_o} = y_2^o, ..., y_n\Big|_{x=x_o} = y_n^o.$$

Định lí này ta không chứng minh.

Về mặt hình học, định lí khẳng định rằng với các điều kiện đã nêu trong một lân cận nào đó của điểm $(x_o, y_1^o, y_2^o, ..., y_n^o)$ tồn tại một đường tích phân duy nhất của hệ đi qua điểm ấy.

• Người ta gọi *nghiệm tổng quát* của hệ (5.51) là bộ n hàm số

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, ..., C_n),\ i = 1, 2, ..., n$$

trong đó $C_1, C_2, ..., C_n$ là các hằng số tùy ý, thỏa mãn các điều sau :

1) Nó thỏa mãn hệ (5.51) với mọi giá trị của $C_1, C_2, ..., C_n$;

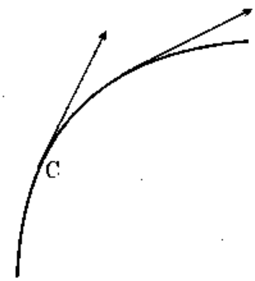
2) Với mọi điểm $(x_o, y_1^o, y_2^o, ..., y_n^o)$ ở đó các điều kiện của định lí tồn tại và duy nhất nghiệm được thỏa mãn, có thể tìm

được một bộ giá trị $C_1 = C_1^o$, $C_2 = C_2^o$, ..., $C_n = C_n^o$ sao cho các hàm số $y_i = \varphi_i(x, C_1^o, C_2^o, ..., C_n^o)$ thỏa mãn các điều kiện ban đầu

$$y_i\Big|_{x=x_o} = y_i^o,\ i = 1, 2, ..., n.$$

Người ta gọi *nghiệm riêng* của hệ (5.51) là nghiệm mà có được bằng cách cho C_1, C_2, ..., C_n trong nghiệm tổng quát các giá trị xác định $C_1 = C_1^o$, $C_2 = C_2^o$, ..., $C_n = C_n^o$.

• *Đường dòng của trường vectơ.* Giả sử trong miền $D \subset \mathbf{R}^n$ xác định một trường vectơ $\overrightarrow{F}(M)$ có các thành phần $F_1(M)$, $F_2(M)$, ..., $F_n(M)$. Người ta gọi đường dòng của trường là một đường cong C mà tiếp tuyến tại mỗi điểm của nó đồng phương với vectơ của trường tại điểm ấy (hình 5.7). Chẳng hạn, các đường sức trong từ trường hay điện trường là các đường dòng của chúng.



Hình 5.7

Nếu phương trình tham số của đường dòng là

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ ...,\ x_n = x_n(t),$$

thì tiếp tuyến của nó tại mỗi điểm $M(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ có hệ số chỉ phương là $x'_1(t)$, $x'_2(t)$, ..., $x'_n(t)$. Vì tiếp tuyến ấy đồng phương với vectơ $\overrightarrow{F}$ của trường tại M, nên ta có

$$\frac{x'_1(t)}{F_1(M)} = \frac{x'_2(t)}{F_2(M)} = ... = \frac{x'_n(t)}{F_n(M)}$$

hay

$$\frac{dx_1}{F_1(M)} = \frac{dx_2}{F_2(M)} = ... = \frac{dx_n}{F_n(M)}.$$

Đó là hệ phương trình vi phân của họ đường dòng.

5.3.2. Cách giải

Mọi phương trình vi phân cấp n dạng

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

đều có thể đưa về một hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp một.

Thật vậy, đặt $y = y_1$, $y' = y_2$, ..., $y^{(n-1)} = y_n$, ta được hệ

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \dots\dots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Đảo lại, một hệ phương trình vi phân cấp một chuẩn tắc có thể được đưa về một phương trình vi phân cấp cao đối với một hàm số chưa biết bằng cách khử những hàm số chưa biết còn lại từ những phương trình của hệ. Giải phương trình vi phân cấp cao đó, rồi tìm những hàm số chưa biết còn lại. Phương pháp giải hệ phương trình vi phân đó được gọi là phương pháp khử.

Ví dụ 1 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y' = 5y + 4z \\ z' = 4y + 5z. \end{cases}$$

Lấy đạo hàm hai vế phương trình đầu, ta được

$$y'' = 5y' + 4z'.$$

Thay z' bởi vế phải của phương trình sau, ta được

$$y'' = 5y' + 16y + 20z.$$

Nhưng từ phương trình đầu suy ra $z = \dfrac{1}{4}(y' - 5y)$. Thế vào phương trình trên, ta được

$$y'' - 10y' + 9y = 0.$$

Nghiệm tổng quát của nó là

$$y = C_1e^x + C_2e^{9x}.$$

Tính y', rồi thế vào phương trình đầu, ta được

$$z = -C_1e^x + C_2e^{9x}.$$

Ví dụ 2 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y + z + x. \end{cases}$$

Đạo hàm hai vế phương trình đầu, ta được

$$y'' = y' + z'.$$

Thay z' bởi vế phải của phương trình sau, ta có

$$y'' = y' + y + z + x.$$

Nhưng $y + z = y'$, nên ta được

$$y'' - 2y' = x.$$

Nghiệm tổng quát của nó là

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}.$$

Tính y' rồi thế vào phương trình đầu, ta được

$$z = -C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4}.$$

Chú ý rằng nếu trừ hai phương trình của hệ từng vế một ta được

$$z' - y' = x \Rightarrow z - y = \frac{x^2}{2} + K,$$

K là hằng số tùy ý. Thế z rút từ đó vào phương trình đầu, ta được

$$y' - 2y = \frac{x^2}{2} + K,$$

đó là một phương trình cấp một đối với y. Tìm được y, tính y' rồi thế vào phương trình đầu của hệ, ta sẽ được z.

Ví dụ 3 : Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z} \\ z' = \dfrac{1}{2} y. \end{cases}$$

Đạo hàm hai vế phương trình sau, ta được

$$z'' = \frac{1}{2}y'.$$

Thế y' bởi vế phải của phương trình đầu, ta có

$$z'' = \frac{1}{2}\frac{y^2}{z}.$$

Nhưng do phương trình sau $y^2 = 4z'^2$, vậy

$$zz'' = 2z'^2.$$

Đó là một phương trình cấp hai đối với z, khuyết x. Đặt $z' = p$, ta có $z'' = p\dfrac{dp}{dz}$, phương trình trên được viết thành

$$zp\frac{dp}{dz} = 2p^2.$$

Nếu $p \neq 0$, ta được

$$\frac{dp}{p} = \frac{2dz}{z} \Rightarrow p = C_1z^2 \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = C_1dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{z} = C_1x + C_2 \Rightarrow z = -\frac{1}{C_1x + C_2}.$$

Vì $y = 2z' = 2C_1z^2$, nên ta được

$$y = \frac{2C_1}{(C_1x + C_2)^2}.$$

Nếu $p = 0$, tức là $z' = 0$, ta thấy $z = C$ ($\neq 0$), $y = 0$ cũng là một nghiệm của hệ.

Chú thích. Trong một số trường hợp, có thể tổ hợp các phương trình của hệ lại để được một phương trình vi phân để giải.

Ví dụ 1 : Giải hệ phương trình

$$y' = z,\ z' = y.$$

Cộng hai phương trình của hệ từng vế một, ta được

$$y' + z' = y + z \Rightarrow \frac{d(y+z)}{y+z} = dx \Rightarrow y + z = C_1e^x.$$

Trừ hai phương trình của hệ từng vế một, ta được

$$y' - z' = -(y - z) \Rightarrow \frac{d(y-z)}{y-z} = -dx \Rightarrow y - z = C_2e^{-x}.$$

Từ hai kết quả ấy, suy ra

$$y = \frac{1}{2}(C_1e^x + C_2e^{-x}),\ z = \frac{1}{2}(C_1e^x - C_2e^{-x}).$$

Ví dụ 2 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y' = y^2 + yz \\ z' = yz + z^2. \end{cases}$$

Chia hai phương trình của hệ từng vế một, ta được

$$\frac{z'}{z} = \frac{y'}{y} \Rightarrow z = C_1y.$$

Cộng hai phương trình của hệ từng vế một, ta được

$$y' + z' = (y + z)^2 \Rightarrow \frac{d(y+z)}{(y+z)^2} = dx \Rightarrow y + z = -\frac{1}{x + C_2}.$$

Từ hai kết quả trên suy ra

$$y = -\frac{1}{(1 + C_1)(x + C_2)},\ z = -\frac{C_1}{(1 + C_1)(x + C_2)}.$$

5.3.3. Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất có hệ số không đổi

Đó là hệ phương trình vi phân có dạng

$$(5.52)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

trong đó các hệ số a_{ij} là những hằng số.

Nếu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là nghiệm của hệ (5.52), ta dùng ký hiệu vectơ $\vec{Y}$ có các thành phần $y_1, y_2, \ldots, y_n$ để chỉ nghiệm ấy. Vì hệ (5.52) là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, nên có thể chứng minh được rằng nếu $\vec{Y_1}, \vec{Y_2}, \ldots, \vec{Y_m}$ là những nghiệm của hệ (5.52) thì mọi tổ hợp tuyến tính của chúng dạng

$$C_1\vec{Y_1} + C_2\vec{Y_2} + \ldots + C_m\vec{Y_m}$$

cũng là nghiệm của hệ ấy.

Có thể giải hệ (5.52) mà không cần đưa nó về phương trình vi phân cấp cao. Ta sẽ tìm nghiệm của hệ (5.52) có dạng

$$(5.53) \qquad y_1 = p_1e^{\lambda x},\ y_2 = p_2e^{\lambda x},\ \ldots,\ y_n = p_ne^{\lambda x},$$

trong đó $p_1, p_2, \ldots, p_n, \lambda$ là những số mà ta sẽ xác định. Thế các biểu thức (5.53) vào hệ (5.52), ta được hệ phương trình đại số tuyến tính sau đây đối với $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$(5.54) \qquad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)p_1 + a_{12}p_2 + \ldots + a_{1n}p_n = 0 \\ a_{21}p_1 + (a_{22} - \lambda)p_2 + \ldots + a_{2n}p_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)p_n = 0. \end{cases}$$

Đó là một hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất, nó phải có nghiệm khác không, do đó định thức của ma trận các hệ số của nó phải bằng không

$$(5.55) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Phương trình (5.55) được gọi là *phương trình đặc trưng* của hệ (5.52), nó là một phương trình đại số bậc n đối với λ. Nghiệm của nó được gọi là giá trị riêng của hệ.

Giả sử phương trình (5.55) có n nghiệm thực phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Ứng với mỗi giá trị riêng λ_k, từ hệ (5.54) ta xác định được n số : $p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{nk}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Vectơ $(p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{nk})$ là vectơ riêng ứng với λ_k. Khi ấy hệ phương trình vi phân (5.52) có n nghiệm

$$y_{11} = p_{11}e^{\lambda_1 x},\ y_{21} = p_{21}e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ y_{n1} = p_{n1}e^{\lambda_1 x}$$
$$y_{12} = p_{12}e^{\lambda_2 x},\ y_{22} = p_{22}e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ y_{n2} = p_{n2}e^{\lambda_2 x}$$
....
$$y_{1n} = p_{1n}e^{\lambda_n x},\ y_{2n} = p_{2n}e^{\lambda_n x},\ \ldots,\ y_{nn} = p_{nn}e^{\lambda_n x}.$$

Hệ nghiệm ấy được gọi là hệ nghiệm cơ bản. Khi đó nghiệm tổng quát của hệ (5.52) là

$$\begin{cases} y_1 = C_1y_{11} + C_2y_{12} + \ldots + C_ny_{1n} \\ y_2 = C_1y_{21} + C_2y_{22} + \ldots + C_ny_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = C_1y_{n1} + C_2y_{n2} + \ldots + C_ny_{nn}. \end{cases}$$

Nếu phương trình đặc trưng (5.55) có các nghiệm thực $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, lần lượt bội $l_1, l_2, \ldots, l_s$ ($l_1 + l_2 + \ldots + l_s = n$), ta tìm nghiệm của hệ (5.52) dưới dạng

$$\begin{cases} y_1 = p_{11}(x)e^{\lambda_1 x} + p_{12}(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + p_{1s}(x)e^{\lambda_s x} \\ y_2 = p_{21}(x)e^{\lambda_1 x} + p_{22}(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + p_{2s}(x)e^{\lambda_s x} \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_n = p_{n1}(x)e^{\lambda_1 x} + p_{n2}(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + p_{ns}(x)e^{\lambda_s x} \end{cases}$$

trong đó $p_{ik}(x)$ là các đa thức bậc $l_k - 1$ ($k = 1, 2, \ldots, s$; $i = 1, 2, \ldots, n$), các hệ số của đa thức này phụ thuộc n hằng số tùy ý $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Dựa vào hệ phương trình (5.52), có thể tìm được các hệ số đó bằng phương pháp hệ số bất định.

Nếu phương trình đặc trưng (5.55) có các nghiệm phức, muốn được nghiệm tổng quát của hệ phương trình (5.52) dưới dạng thực thì tương tự như khi giải các phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp hai có hệ số không đổi ta dùng công thức Euler và lấy các nghiệm riêng là phần thực và phần ảo của nghiệm riêng phức tương ứng.

Ví dụ 1 : Giải hệ

$$\begin{cases} y' = y + 2z \\ z' = 4y + 3z. \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng là

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ hay } \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0.$$

Nó có hai nghiệm $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$. Ứng với $\lambda_1 = 5$, hệ phương trình để xác định vectơ riêng

$$\begin{cases} (1-5)p_1 + 2p_2 = 0 \\ 4p_1 + (3-5)p_2 = 0 \end{cases}$$

thực chất chỉ gồm có một phương trình là $4p_1 - 2p_2 = 0$. Có thể lấy $p_1 = 1$, $p_2 = 2$. Vậy vectơ riêng ứng với $\lambda_1 = 5$ là $(1, 2)$. Tương tự ta tìm được vectơ riêng ứng với $\lambda_2 = -1$ là $(1, -1)$. Do đó hệ nghiệm cơ bản là

$$y_1 = e^{5x} \qquad z_1 = 2e^{5x}$$

$$y_2 = e^{-x} \qquad z_2 = -e^{-x}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho là

$$y = C_1e^{5x} + C_2e^{-x}$$

$$z = 2C_1e^{5x} - C_2e^{-x}.$$

Ví dụ 2 : Giải hệ

$$\begin{cases} y' = y - 5z \\ z' = 2y - z. \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng là

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ hay } \lambda^2 + 9 = 0$$

có nghiệm $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$. Vectơ riêng ứng với $\lambda_1 = 3i$ là $(5, 1 - 3i)$. Do đó ta có nghiệm

$$y_1 = 5e^{3ix} = 5\cos 3x + i5\sin 3x$$

$$z_1 = (1-3i)e^{3ix} = (\cos 3x + 3\sin 3x) + i(\sin 3x - 3\cos 3x).$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ đã cho là

$$y = 5C_1\cos 3x + 5C_2\sin 3x$$

$$z = C_1(\cos 3x + 3\sin 3x) + C_2(\sin 3x - 3\cos 3x).$$

Ví dụ 3 : Giải hệ

$$\begin{cases} y' = y - z \\ z' = y + 3z. \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng là

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ hay } \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

có nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Do đó ta tìm nghiệm của hệ có dạng

$$y = (ax + b)e^{2x}$$

$$z = (cx + d)e^{2x}.$$

Thế vào hệ phương trình, ta được

$$\begin{cases} 2ax + 2b + a = (a - c)x + b - d \\ 2cx + 2d + c = (a + 3c)x + (b + 3d). \end{cases}$$

Đồng nhất hệ số của các số hạng cùng bậc, ta được

$$\begin{cases} 2a = a - c \\ 2b + a = b - d \\ 2c = a + 3c \\ 2d + c = b + 3d. \end{cases}$$

Cho $a = C_1$, $b = C_2$, C_1, C_2 tùy ý, ta được $c = -C_1$, $d = -(C_1 + C_2)$.
Vậy nghiệm tổng quát là

$$y = (C_1x + C_2)e^{2x}$$

$$z = -(C_1x + C_1 + C_2)e^{2x}.$$

TÓM TẮT CHƯƠNG V

Phương trình vi phân cấp một $f(x, y, y') = 0$

- Phương trình biến số phân ly : $f(x)dx = f(y)dy$

  Cách giải : lấy tích phân hai vế.

- Phương trình thuần nhất : $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Đặt $y = u.x$, được một phương trình biến số phân ly để tìm u

- Phương trình tuyến tính $y' + p(x)y = q(x)$ (1)

Trước hết giải phương trình $y' + p(x)y = 0$ (2)

Nghiệm tổng quát của nó là $y = Cy_1(x)$. Rồi xem C là hàm số của x, tìm C(x) để $y = C(x).\ y_1(x)$ là nghiệm của (1).

Nghiệm tổng quát của (1) bằng nghiệm tổng quát của (2) cộng một nghiệm riêng của (1).

- Phương trình Bernoulli : $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$

Chia hai vế cho y^{α}, đặt $z = y^{1-\alpha}$, được một phương trình tuyến tính để tìm z.

- Phương trình vi phân toàn phần : $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, trong đó $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Nghiệm tổng quát là $u(x, y) = C$, trong đó

$$u(x, y) = \int_{x_o}^{x} P(x, y_o)dx + \int_{y_o}^{y} Q(x, y)dy$$

hay

$$u(x, y) = \int_{y_o}^{y} Q(x_o, y)dy + \int_{x_o}^{x} P(x, y)dx,$$

x_o, y_o là hai số nào đó.

- Phương trình Clairaut : $y = xy' + f(y')$

Đặt $y' = t$, ta được họ đường tích phân tổng quát là họ đường thẳng $y = xC + f(C)$ và đường tích phân kỳ dị là hình bao của họ trên.

- Phương trình Lagrange : $y = xg(y') + f(y')$.

Đặt $y' = t$, thế vào phương trình, lấy đạo hàm hai vế đối với x, được một phương trình tuyến tính đối với x.

- Quỹ đạo trực giao của họ đường $F(x, y, C) = 0$. Khử C từ hai phương trình $F(x, y, C) = 0$, $\frac{d}{dx} F(x, y, C) = 0$, được phương trình $f(x, y, y') = 0$, là phương trình vi phân của họ.

Thay trong đó y' bởi $-\frac{1}{y'}$, ta được phương trình vi phân của họ quỹ đạo trực giao $f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$.

Phương trình vi phân cấp hai $f(x, y, y', y'') = 0$.

- Phương trình khuyết

– Nếu phương trình khuyết y và y' : $f(x, y'') = 0$, đặt $y' = p$, ta được phương trình cấp một $f(x, p') = 0$.

– Nếu phương trình khuyết y : $f(x, y', y'') = 0$, đặt $y' = p$, ta được phương trình cấp một $f(x, p, p') = 0$.

– Nếu phương trình khuyết x : $f(y, y', y'') = 0$, đặt $y' = p$, ta được phương trình cấp một $f\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$.

- Phương trình tuyến tính : $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ (3)

– Hãy xét phương trình thuần nhất $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (4)

Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của (4) thì $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ là nghiệm tổng quát của nó.

Nếu biết một nghiệm riêng của (4) là $y = y_1(x)$, có thể tìm một nghiệm độc lập tuyến tính với nó bằng cách đặt $y_2(x) = y_1(x) \cdot u(x)$.

– Xét phương trình không thuần nhất (3)

Nghiệm tổng quát của phương trình (3) bằng nghiệm tổng quát của phương trình (4) cộng một nghiệm riêng của phương trình (3).

Nếu nghiệm tổng quát của phương trình (4) là $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ thì có thể cho C_1, C_2 biến thiên và tìm chúng để $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ thỏa mãn phương trình (3). Muốn vậy $C'_1(x)$, $C'_2(x)$ phải thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} C'_1y_1 + C'_2y_2 = 0 \\ C'_1y'_1 + C'_2y'_2 = f(x). \end{cases}$$

- Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số không đổi $y'' + py' + qy = 0$

Xét phương trình đặc trưng $k^2 + pk + q = 0$ (5)

Nếu (5) có hai nghiệm thực phân biệt $k = k_1$, $k = k_2$, nghiệm tổng quát là $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$.

Nếu (5) có một nghiệm kép $k_1 = k_2$, nghiệm tổng quát là $y = (C_1x + C_2)e^{k_1x}$.

Nếu (5) có hai nghiệm phức liên hợp $k = \alpha \pm i\beta$, nghiệm tổng quát là $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.

• **Phương trình tuyến tính không thuần nhất có hệ số không đổi**

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

Trong hai trường hợp sau, có thể tìm một nghiệm riêng của nó :

1) $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, $P_n(x)$ là một đa thức bậc n. Ta tìm một nghiệm riêng của phương trình có dạng

$Y = e^{\alpha x}Q_n(x)$ nếu α không là nghiệm của phương trình (5)

$Y = xe^{\alpha x}Q_n(x)$ nếu α là nghiệm đơn của phương trình (5)

$Y = x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$ nếu α là nghiệm kép của phương trình (5),

$Q_n(x)$ là một đa thức bậc n, các hệ số của nó được xác định bằng phương pháp hệ số bất định.

2) $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x$, $P_m(x)$, $P_n(x)$ là những đa thức bậc m, n. Ta tìm một nghiệm riêng của phương trình có dạng

$Y = Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x$ nếu $\pm i\beta$ không là nghiệm của (5)

$Y = x[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x]$ nếu $\pm i\beta$ là nghiệm của (5).

$Q_l(x)$, $R_l(x)$ là những đa thức bậc $l = \max(m, n)$.

Trong trường hợp tổng quát, dùng phương pháp biến thiên hằng số.

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình vi phân có biến số phân ly :

1) $(1 + x)y\,dx + (1 - y)x\,dy = 0$

2) $(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$

3) $y'\cos 2y - \sin y = 0$

4) $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$

5) $y' = \dfrac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$

6) $y' = \cos(x - y)$

7) $y' = x^2 + 2xy - 1 + y^2$

8) $y' = \dfrac{1}{x - y} + 1.$

2. Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện ban đầu :

1) $x\sqrt{1 + y^2}\,dx + y\sqrt{1 + x^2}\,dy = 0,\ y\big|_{x=0} = 1$

2) $(1 + e^{2x})\,y^2dy = e^x dx,\ y\big|_{x=0} = 0$

3) $\sin x\,dy - y\ln y\,dx = 0,\ y\big|_{x=0} = 1$

4) $(x^2 + 1)y' = y^2 + 4,\ y\big|_{x=1} = 2.$

3. Giải các phương trình vi phân đẳng cấp cấp một :

1) $(y - x)\,dx + (y + x)\,dy = 0$

2) $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$

3) $xyy' + x^2 - 2y^2 = 0$

4) $(3x^2 + y^2)y + (y^2 - x^2)xy' = 0$

5) $2(x + yy')^2 = y^2(1 + y'^2)$

6) $x\cos\dfrac{y}{x}(y\,dx + x\,dy) = y\sin\dfrac{y}{x}(x\,dy - y\,dx)$

7) $y' = \dfrac{x - y + 1}{x + y + 3}$

8) $y' = 2\left(\dfrac{y + 2}{x + y - 1}\right)^2$.

4. Tìm những đường cong thỏa mãn điều kiện sau đây : đoạn của trục Oy cắt bởi đường pháp tuyến của đường cong tại điểm M bằng khoảng cách OM.

5. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp một :

1) $2x(x - 1)y' + (2x - 1)y + 1 = 0$

2) $x(1 + x^2)y' - (x^2 - 1)y + 2x = 0$

3) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

4) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$

5) $y' - \dfrac{2y}{(x + 1)} = (x + 1)^3$, $y\Big|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$

6) $(1 + x^2)y' + xy = 1$, $y\Big|_{x=0} = 0$

7) $2ydx + (y^2 - 6x)\,dy = 0$

8) $xy' - y = x^2\operatorname{arctg}x$

9) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x$, $y\Big|_{x=e} = \dfrac{e^2}{2}$

10) $(x^3 + x)y' + 3x^2y = \sqrt{x^2 + 1}$.

6. Chứng minh rằng phương trình $x(x^2 + 1)y' - (2x^2 + 3)y = 3$ có một nghiệm là một tam thức bậc hai. Giải phương trình ấy.

7. Chứng minh rằng hàm số $y = x\int_1^x e^{t^2}dt$ là nghiệm của phương trình $xy' - y = x^2e^{x^2}$. Tìm nghiệm riêng của phương trình ấy thỏa mãn điều kiện $y\Big|_{x=1} = 1$.

8. Giải các phương trình vi phân :

1) $xy^2 + x^2(x + 1)\,yy' + 3x - 5 = 0$

2) $y' + xy = x^3y^3$

3) $(y\ln x - 2)\, ydx = xdy$

4) $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y},\ y\big|_{x=0} = \dfrac{9}{4}$

5) $ydx + (x + x^2y)\, dy = 0$

6) $\dfrac{dy}{dx}(x^2y^3 + xy) = 1$.

9. Chứng minh rằng phương trình $(x^3 - 1)y' = y^2 + x^2y - 2x$ có một nghiệm riêng dạng $y_1 = x^\alpha$. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình ấy bằng cách đặt $y = y_1 + z$.

10. Tìm đường cong đi qua điểm $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ biết rằng đoạn của trục tung cắt bởi đường tiếp tuyến của đường cong tại mọi điểm bằng bình phương của tung độ của điểm ấy.

11. Giải các phương trình vi phân toàn phần :

1) $(x + y + 1)\, dx + (x - y^2 + 3)\, dy = 0$

2) $2\,(3xy^2 + 2x^3)\, dx + 3(2x^2y + y^2)\, dy = 0$

3) $\left[\dfrac{y^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{x}\right] dx + \left[\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right] dy = 0$

4) $\dfrac{xdx + (2x + y)\, dy}{(x + y)^2} = 0$

5) $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2}\right)dy = 0$

6) $3x^2(1 + \ln y)\, dx - \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right) dy = 0$.

12. 1) Giải phương trình $\left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right) dx + (x^2 + y^2)\, dy = 0$ bằng cách tìm thừa số tích phân dạng $\alpha(x)$.

2) Giải phương trình $y(1 + xy)\,dx - xdy = 0$ bằng cách tìm thừa số tích phân dạng $\alpha(y)$.

3) Giải phương trình $xdy + ydx - xy^2\ln x dx = 0$ bằng cách tìm thừa số tích phân dạng $\alpha(xy)$.

13. Giải các phương trình vi phân :

1) $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2y^5$

2) $xy' = y - x\cos^2\dfrac{y}{x}$

3) $y' = \dfrac{2x^3y - y^4}{x^4 - 2xy^3}$

4) $x = y' + y'^3$

5) $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$

6) $y = xy' + \dfrac{y'}{y' + 1}$

7) $y^3 + y'^3 - yy' = 0$.

14. Tìm quỹ đạo trực giao của các họ đường cong phụ thuộc tham số C :

1) $y^2 = 2p(x - C)$

2) $x^2 - y^2 = C$

3) $x^2 + y^2 = 2Cx$

4) $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)C^2$.

15. Cho phương trình vi phân $(1 - x^3)y' - y^2 + x^2y + 2x = 0$.

1) Tìm một nghiệm riêng của phương trình có dạng

$y_1(x) = ax^n$, $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

2) Giải phương trình bằng cách đặt $y = y_o + \dfrac{1}{z}$.

16. Giải các phương trình cấp hai khuyết :

1) $xy'' - y' = x^2e^x$

2) $y'' - \dfrac{y'}{x-1} - x(x-1) = 0,\ y\big|_{x=2} = 1,\ y'\big|_{x=2} = -1$

3) $y'' + 2y'(1-2y) = 0,\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$

4) $xy'' - y' = x^2\ln x,\ y\big|_{x=1} = -\dfrac{4}{9},\ y'\big|_{x=1} = -1$

5) $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$

6) $y''^2 + y'^2 = a^2$

7) $y'' = \dfrac{1}{2y'}$.

17. Giải các phương trình vi phân :

1) $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$, biết rằng nó có một nghiệm riêng dạng $y_1(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$

2) $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$, biết rằng nó có một nghiệm riêng dạng $y_1(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbf{R}$

3) $(x^2-1)y'' - 6y = 0$, biết rằng nó có một nghiệm riêng $y_1(x)$ có dạng đa thức

4) $(2x - x^2)y'' + (x^2-2)y' + 2(1-x)y = 0$, $y\big|_{x=1} = 0$, $y'\big|_{x=1} = 1$ biết rằng nó có một nghiệm riêng $y_1(x) = e^x$.

18. Giải phương trình $(2x - x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2$ biết rằng nó có hai nghiệm riêng là $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$.

19. Giải phương trình

$$x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x + \frac{1}{x}$$

biết rằng phương trình thuần nhất tương ứng của nó có một nghiệm riêng dạng đa thức.

20. Giải các phương trình :

1) $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

2) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x + 1}$

3) $y'' + y = \text{tg}x$

4) $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$

5) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$.

21. Giải các phương trình :

1) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

2) $y'' + 9y = 6e^{3x}$

3) $y'' - 3y' = 2 - 6x$

4) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$

5) $y'' + 4y = 2\sin 2x$

6) $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$

7) $y'' - 9y' + 20y = x^2e^{4x}$

8) $y'' + 4y' - 5y = 2e^x$

9) $y'' + 2y' + 5y = 2xe^{-x}\cos 2x$

10) $y'' + y = x^2\cos^2 x$

11) $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$

12) $y'' + y = \cos^3 x$

13) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\cos^2 x$

14) $y'' - 2y' + (1 + \alpha^2)y = (1 + 4\alpha^2)\cos\alpha x$, $y\big|_{x=0} = 1$, $y'\big|_{x=0} = 0$

15) $y'' + 6y' + 9y = xe^{\alpha x}$

16) $y'' - (m + 1)y' + my = e^x - x - 1$.

22. Giải phương trình $x^2y'' + xy' - 4y = x^2\ln x$ bằng cách đổi biến số $x = e^t$.

23. Giải phương trình $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$ bằng cách đổi biến số $t = e^x$.

24. Giải phương trình $(x^2+1)y'' + 2xy' + \dfrac{4y}{x^2+1} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ bằng cách đổi biến số $x = \mathrm{tg}t$, $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$.

25. Giải phương trình $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$ bằng cách đổi biến số $x = \mathrm{sh}t$.

26. Giải phương trình $x^2y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0$ bằng phép đổi hàm số phải tìm $z = \dfrac{y}{x}$.

27. Giải phương trình $x^2y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = \dfrac{1}{\cos x}$ bằng phép biến đổi $y = \dfrac{u}{x^2}$.

28. Đặt $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Tìm hàm số $\varphi(r)$ để cho hàm số $u(x, y, z) = \dfrac{\varphi(r)}{r}$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4u.$$

29. Đặt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tìm hàm số $\varphi(r)$ để cho hàm số $u(x, y) = \varphi(r)$ thỏa mãn phương trình $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{xy}{r^\alpha}$, α là một hằng số.

30. Người ta gọi phương trình có dạng $F\left(x, \dfrac{y'}{y}, \dfrac{y''}{y}\right) = 0$ là phương trình vi phân thuần nhất cấp hai. Chứng minh rằng có thể đưa nó về phương trình vi phân cấp một bằng phép biến đổi $\dfrac{y'}{y} = z$. Giải phương trình

$$yy'' - y'^2 + yy' + x^2y^2 = 0.$$

31. Tìm nghiệm khai triển được thành chuỗi lũy thừa của phương trình vi phân

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

thỏa mãn điều kiện $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = 1$. Từ đó tìm nghiệm tổng quát của phương trình.

32. Tìm nghiệm khai triển được thành chuỗi lũy thừa của phương trình

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \frac{1}{4}y = 0$$

thỏa mãn điều kiện $y\big|_{x=0} = 1$, $y'\big|_{x=0} = \frac{1}{2}$.

33. Giải các hệ phương trình vi phân :

1) $\begin{cases} y' = 4y - 2z \\ z' = y + z \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y' = 3y - 2z \\ z' = 2y - z \end{cases}$

3) $\begin{cases} y' = y + 8z + e^x \\ z' = 2y + z + e^{-3x} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y' = y + z - 3, & y\big|_{x=0} = 0 \\ z' = -2y + 3z + 1, & z\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{z} \\ z' = \dfrac{1}{y - x} \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2y + 3z}, \\ z' = \dfrac{z}{2y + 3z} \end{cases}$ $\begin{matrix} y\big|_{x=0} = 1 \\ z\big|_{x=0} = 2 \end{matrix}$

7) $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z} \\ z' = \dfrac{1}{2}y \end{cases}$ 8) $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{yz} \\ z' = \dfrac{x}{y^2} \end{cases}$

9) $\begin{cases} (z - y)^2 y' = z \\ (z - y)^2 z' = y \end{cases}$ 10) $\dfrac{dx}{y + z} = \dfrac{dy}{z + x} = \dfrac{dz}{x + y}$.

34. Giải các hệ phương trình :

1) $\begin{cases} y' = z - y \\ z' = -y - 3z \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y' = 4y - 3z \\ z' = 3y + 4z \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + z \end{cases}$

ĐÁP SỐ

1. 1) $\ln|xy| + x - y = C$

2) $\dfrac{x+y}{xy} + \ln\left|\dfrac{y}{x}\right| = C$

3) $x = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}\right| + 2\cos y + C$

4) $2\sin x + \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}\right| = C$

5) $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = C\left(\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} + 1\right)\left(1 - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$

6) $x + \operatorname{cotg}\dfrac{x - y}{2} = C$

7) $y = \dfrac{1}{C - x} - x$

8) $(x - y)^2 = -2x + C.$

2. 1) $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = \sqrt{2} + 1$

2) $y^3 = 3\operatorname{arctg} e^x - \dfrac{3\pi}{4}$

3) Mọi nghiệm đều thỏa mãn điều kiện ấy

4) $y = \dfrac{2(x^2 - 1) + 4x}{1 - x^2 + 2x}$.

3. 1) $y^2 + 2xy - x^2 = C^2$

2) $1 + 2Cy - C^2x^2 = 0$

3) $y = \pm x\sqrt{1 + C^2x^2}$

4) $x(x^2 + y^2) - C^2y = 0$

5) $x^2 + y^2 - 2Cx - C^2 = 0$

6) $xy\cos\dfrac{y}{x} = C$

7) $x^2 - 2xy - y^2 + 2x - 6y = C$ (Đặt $x = X + 1$, $y = Y + 2$)

8) $e^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}} = C(y + 2).$

4. $x^2 = C(2y + C).$

5. 1) $y = \dfrac{C}{\sqrt{x^2 - x}} - \dfrac{\ln\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x}\right)}{2\sqrt{x^2 - x}}$ nếu $x < 0$ hoặc $x > 1$;

$y = \dfrac{C}{\sqrt{x - x^2}} + \dfrac{\arcsin(2x - 1)}{2\sqrt{x - x^2}}$ nếu $0 < x < 1$.

2) $y = Cx + (1 + C)\dfrac{1}{x}$; 3) $y = e^{-x^2}\left(C + \dfrac{x^2}{2}\right)$

4) $y = (1 + x^2)(x + C)$; 5) $y = (x + 1)^2\left(\dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2}\right)$

6) $y = \dfrac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}}$; 7) $y^2 - 2x = Cy^3$ (giải x theo y)

8) $y = Cx + x^2\operatorname{arctg}x - \dfrac{x}{2}\ln(x^2 + 1)$; 9) $y = \dfrac{1}{2}x^2\ln x$

10) $y = (x^2 + 1)^{-3/2}\left(\dfrac{x^2}{2} + \ln|x| + C\right)$.

6. $y = \dfrac{Cx^3}{\sqrt{x^2 + 1}} + (2x^2 - 1)$.

7. $y = x\left(1 + \int_1^x e^{t^2}dt\right)$.

8. 1) $y^2 = C\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2 + \dfrac{6(x + 1)}{x^2} - \dfrac{8}{x^2}$; 2) $y^2(x^2 + 1 + Ce^{x^2}) = 1$

3) $y\left(\dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{4} + Cx^2\right) = 1$; 4) $y = e^{-x}\left(\dfrac{1}{2}e^x + 1\right)^2$

5) $x = \dfrac{1}{y(\ln|y| + C)}$ (giải x theo y); 6) $\dfrac{1}{x} = Ce^{-\frac{1}{2}y^2} - y^2 + 2$.

9. $y = x^2 + \dfrac{x^3 - 1}{C - x}$.

10. $y = \dfrac{x}{x + 1}$.

11. 1) $\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = C$; 2) $x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = C$

3) $\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{xy}{x-y} = C$; 4) $\ln|x + y| - \frac{x}{x+y} = C$

5) $\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C$; 6) $x^3(1 + \ln y) - y^2 = C$.

12. 1) $\alpha(x) = e^x$; $ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) = C$; 2) $\alpha(y) = \frac{1}{y^2}$; $\frac{2x}{y} + x^2 = C$

3) $\alpha(xy) = \frac{1}{x^2y^2}$; $\frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{xy} = C$.

13. 1) $y^4 = \frac{x^2}{C - 4x^5}$; 2) $y = -x\,\mathrm{arctg}\left(\ln\left|\frac{x}{C}\right|\right)$

3) $xy = C(x^3 + y^3)$; 4) $x = t + t^3,\ y = \frac{t^2}{2} + 3\frac{t^4}{4} + C$

5) Phương trình Clairaut. Nghiệm tổng quát $y = Cx + \frac{1}{C}$. Nghiệm kì dị $y^2 = 4x$.

6) Phương trình Lagrange. Nghiệm tổng quát $y = Cx + \frac{C}{C+1}$. Nghiệm kì dị $(x + y)^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

7) $x = -u + \frac{1}{2}\ln\frac{(u+1)^2}{u^2 - u + 1} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}} + C$

$$y = \frac{u^2}{u^3 + 1}$$

(Tham số hóa phương trình theo $t = \frac{y'}{y}$, rồi đặt $u = \frac{1}{t}$).

14. 1) $y = Ke^{-\frac{x}{p}}$; 2) $y = \frac{K}{x}$

3) $y = K(x^2 + y^2)$; 4) $(x^2 + y^2)^2 = Kxy$

15. $y_o(x) = -x^2,\ y = -\dfrac{Cx^2+1}{x+1}$.

16. 1) $y = e^x(x-1) + C_1x^2 + C_2$; 2) $y = \dfrac{1}{24}(3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 72x + 8)$

3) $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(x+1)}$; 4) $y = \dfrac{x^3}{3}\left(\ln x - \dfrac{4}{3}\right)$

5) $y - C_1 \ln|y| = x + C_2$; 6) $y = C_2 \pm a\cos(x + C_1)$

7) $y = \pm\dfrac{2}{3}(x + C_1)^{3/2} + C_2$.

17. 1) $y = C_1x + C_2\ln|x|$; 2) $y = C_1e^{-2x} + C_2\left[\dfrac{(2x+1)^2}{2} - 2x\right]$

3) $y = C_1(x^3 - x) + C_2\left[1 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3x(x^2-1)}{4}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|\right]$

4) $y = x^2 - e^{x-1}$.

18. $y = C_1x^2 + C_2(x-1) + 1$.

19. $y = \dfrac{x+2}{2}\ln|x| + C_1(x+2) + C_2\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{2}$.

20. 1) $y = \dfrac{e^x}{2}(x - \ln(e^x+1) + C_1) - \dfrac{e^{-x}}{2}(e^x - \ln(e^x+1) + C_2)$.

2) $y = e^{-x}(C_1 + C_2x + \dfrac{4}{5}(1+x)^{5/2})$

3) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

4) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + \dfrac{1}{2}e^{-2x}\ln(1+e^{2x}) + e^{-3x}\operatorname{arctg}e^x$

5) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \sqrt{\cos 2x}$.

21. 1) $y = C_1e^x + C_2e^{6x} + \dfrac{5\sin x + 7\cos x}{74}$

2) $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \dfrac{1}{3}e^{3x}$

3) $y = C_1 + C_2e^{3x} + x^2$

4) $y = e^x(C_1\cos\sqrt{2}\,x + C_2\sin\sqrt{2}\,x) + \frac{e^{-x}}{41}(5\cos x - 4\sin x)$

5) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x$

6) $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + 2x^2e^{-x}$

7) $y = C_1e^{5x} + C_2e^{4x} - \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x\right)e^{4x}$

8) $y = C_1e^x + C_2e^{-5x} + \frac{x}{3}e^x$

9) $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^{-x}\left(\frac{1}{8}x\cos 2x + \frac{1}{4}x^2\sin 2x\right)$

10) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x^2}{2} - 1 - \frac{x^2\cos 2x}{6} + \frac{4x\sin 2x}{9} + \frac{13\cos 2x}{27}$

11) $y = C_1 + C_2e^{3x} + \frac{1}{3}xe^{3x} + 3x^2 + 2x$

12) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{32}\cos 3x + \frac{3x}{8}\sin x$

13) $y = e^{2x}(C_1 + C_2x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\cos 2x)$

14) $y = \cos\alpha x + 2\alpha\,(e^x - 1)\sin\alpha x$

15) Nếu $\alpha \neq -3$, $y = (C_1 + C_2x)e^{-3x} + \frac{e^{\alpha x}}{(\alpha+3)^2}\left(x - \frac{2}{\alpha+3}\right)$

Nếu $\alpha = -3$, $y = (C_1 + C_2x)e^{-3x} + \frac{x^3}{6}e^{-3x}$

16) Nếu $m \neq 0, m \neq 1, y = C_1e^x + C_2e^{mx} + \frac{1}{1-m}xe^x - \frac{x}{m} - \frac{2}{m} - \frac{1}{m^2}$

Nếu $m = 0$, $y = C_1e^x + C_2 + xe^x + \frac{x^2}{2} + 2x$

Nếu $m = 1$, $y = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x - x - 3$.

22. $y = \frac{C_1}{x^2} + x^2\left[C_2 + \frac{1}{8}\ln^2 x - \frac{1}{16}\ln x\right]$.

23. $y = C_1e^x + C_2 - \cos e^x$.

24. $y = C_1\frac{x}{1+x^2} + C_2\frac{1-x^2}{1+x^2} - \frac{1}{4}\frac{1-x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg}x$.

25. $y = C_1(\sqrt{1+x^2} + x) + C_2(\sqrt{1+x^2} - x)$.

26. $y = x(C_1e^x + C_2e^{-x})$.

27. $y = \frac{1}{x^2}(C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x\ln|\cos x| + x\sin x)$.

28. $\varphi(r) = C_1e^{2r} + C_2e^{-2r}$.

29. Nếu $\alpha \neq 2$, $\alpha \neq 4$, $\varphi(r) = \frac{r^{4-\alpha}}{(2-\alpha)(4-\alpha)} + C_1r^2 + C_2$.

Nếu $\alpha = 4$, $\varphi(r) = -\frac{1}{2}\ln r + C_1r^2 + C_2$.

Nếu $\alpha = 2$, $\varphi(r) = \frac{r^2}{2}\ln r + C_1r^2 + C_2$.

30. $y = C_2e^{\left(-\frac{x^3}{3} + x^2 - 2x - C_1e^{-x}\right)}$

31. $y = x$; $y = C_1x + C_2\left(\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1\right)$.

32. $y = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \dots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \dots$

hội tụ trong khoảng $-1 \leq x < 1$.

33. 1) $y = C_1e^{2x} + 2C_2e^{3x}$, $z = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$

2) $y = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{2}C_2e^x$, $z = (C_1 + C_2x)\ e^x$

3) $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-3x} - xe^{-3x}$

$$z = \frac{C_1}{2}e^{5x} - \frac{C_2}{2}e^{-3x} - \frac{1}{8}e^x + \frac{1}{2}xe^{-3x} - \frac{1}{8}e^{-3x}$$

4) $y = e^{2x}\ (-\ 2\cos x + \sin x) + 2$

$z = e^{2x}\ (-\ \cos x + 3\ \sin x) + 1$

5) $y = \frac{1}{C_1C_2}\ e^{-C_1x} + x$, $z = C_2e^{C_1x}$

6) $y = \frac{x}{8} + 1$, $z = \frac{x}{4} + 2$

7) $y = \frac{1}{(C_1x + C_2)^2}$, $z = -\frac{1}{2C_1(C_1x + C_2)}$

8) $\frac{z}{y} = C_1$, $zy^2 - \frac{3}{2}x^2 = C_2$

9) $y^2 - z^2 = C_1$, $2x + (z - y)^2 = C_2$

10) $\frac{z - x}{y - x} = C_1$, $(x - y)^2\ (x + y + z) = C_2$

34. 1) $y = (C_1 + C_2x)\ e^{-2x}$, $z = (C_2 - C_1 - C_2x)\ e^{-2x}$

2) $y = e^{4x}\ (C_1\cos 3x + C_2\ \sin 3x)$, $z = e^{4x}\ (-\ C_1\sin 3x + C_2\cos 3x)$

3) $x = C_1e^t + C_2e^{-2t}$, $y = C_1e^t + C_3e^{-2t}$, $z = C_1e^t - (C_2 + C_3)\ e^{-2t}$

4) $x = C_1e^{2t} + C_2e^t\cos t + C_3e^t\sin t$

$y = C_1e^{2t} + C_3e^t\cos t - C_2e^t\sin t$

$z = C_1e^{2t} - C_3e^t\cos t + C_2e^t\sin t.$

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập lần đầu :
NGUYỄN TRỌNG BÁ
Biên tập tái bản :
PHẠM BẢO KHUÊ
Sửa bản in :
PHẠM BẢO KHUÊ
Sắp chữ :
PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

TOÁN HỌC CAO CẤP - TẬP 3

Mã số: 7K077T6 - DAI

In 5.000 bản, khổ 14,3 x 20,3 cm tại Công ty Cổ phần In Phúc Yên.
Số xuất bản: 04-2006/CXB/113 - 1860/GD
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2006.

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
Địa chỉ : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội

Tìm đọc
SÁCH THAM KHẢO ĐẠI HỌC MÔN TOÁN
của Nhà xuất bản Giáo dục

1. Giải tích hàm	Nguyễn Xuân Liêm
2. Bài tập giải tích hàm	Nguyễn Xuân Liêm
3. Tôpô đại cương - Độ đo và tích phân	Nguyễn Xuân Liêm
4. Giải tích tập 1	Nguyễn Xuân Liêm
5. Giải tích tập 2	Nguyễn Xuân Liêm
6. Đại số đại cương	Nguyễn Hữu Việt Hưng
7. Số đại số	Hoàng Xuân Sính
8. Hình học vi phân	Đoàn Quỳnh
9. Giải tích số	Nguyễn Minh Chương *(chủ biên)*
10. Phương trình đạo hàm riêng	Nguyễn Minh Chương
11. Cơ sở phương trình vi phân và lí thuyết ổn định	Nguyễn Thế Hoàn - Phạm Phu
12. Mở đầu lí thuyết xác suất và ứng dụng	Đặng Hùng Thắng
13. Bài tập xác suất	Đặng Hùng Thắng
14. Lí thuyết xác suất	Nguyễn Duy Tiến Vũ Viết Yên
15. Xác suất thống kê	Nguyễn Văn Hộ
16. Phương pháp tính và các thuật toán	Phan Văn Hạp Lê Đình Thịnh
17. Từ điển toán học thông dụng	Ngô Thúc Lanh *(chủ biên)*

Bạn đọc có thể tìm mua tại các Công ti Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục:
Tại Hà Nội : ***25 Hàn Thuyên, 81 Trần Hưng Đạo, 187B Giảng Võ, 23 Tràng Tiền***
Tại Đà Nẵng : ***15 Nguyễn Chí Thanh***
Tại Thành phố Hồ Chí Minh : ***104 Mai Thị Lựu, Quận 1***

8934980685495

Giá: 14.400 đ